

# NICHTGLEICHGEWICHTSDYNAMIK DES CHIRALEN PHASENÜBERGANGS IN RELATIVISTISCHEN KERN-KERN KOLLISIONEN

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik  
der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
in Frankfurt am Main

von

Kerstin Anja Paech  
aus Hanau

Frankfurt am Main 2005

(D 30)

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe–Universität als  
Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Wolf Aßmus

Gutachter: J. Prof. Dr. Adrian Dumitru  
Prof. Dr. Stefan Schramm

Datum der Disputation: 8. November 2005

*Für all die profanen Engel, welche  
mich durch kleine und große Gesten  
inspiriert und mich dadurch auf  
meinen Wegen begleitet haben.*



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dynamische Beschreibung der chiralen Symmetriebrechung</b>	<b>7</b>
2.1	Ideale Relativistische Hydrodynamik . . . . .	8
2.2	Chirale Symmetrie . . . . .	14
2.3	Die effektive Feldtheorie von Gell-Mann und Levy . . . . .	17
2.4	Thermodynamik des linearen $\sigma$ -Modells . . . . .	20
2.5	Phasendiagramm für verschiedene Parameter . . . . .	22
2.6	Gekoppelte Dynamik von Feldern und Flüssigkeit . . . . .	28
2.7	Thermische Fluktuationen des Ordnungsparameterfeldes . . . . .	31
2.8	Zusammenfassung des Modells und Problemstellungen . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Kollektive Observablen</b>	<b>37</b>
3.1	Azimuthale Impulsanisotropie und Elliptischer Fluß . . . . .	37
3.2	Anfangsbedingungen und numerische Parameter . . . . .	41
3.3	Ergebnisse: Zeitentwicklung des chiralen Feldes und der Energiedichte	45
3.4	Ergebnisse: Azimuthale Impulsanisotropie . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Korrelationen in der Nähe des kritischen Punktes</b>	<b>55</b>
4.1	Fluktuationen und Korrelationslängen . . . . .	56
4.2	Anfangsbedingungen und numerische Parameter . . . . .	58
4.3	Ergebnisse: Zeitentwicklung der Korrelationslänge . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Dichteinhomogenitäten</b>	<b>65</b>
5.1	Begriffsbildung Dichteinhomogenitäten . . . . .	66
5.2	Anfangsbedingungen und numerische Parameter . . . . .	67
5.3	Ergebnisse: Inhomogenitäten der Energie- und Baryonendichte . . . .	69
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>



# LISTE DER ABBILDUNGEN

2.1	Phasendiagramm des linearen $\sigma$ -Modells in Abhängigkeit von der Temperatur $T$ und dem Quarkchemischen Potential $\mu$ . . . . .	23
2.2	Effektives Potential für ausgewählte Werte von $T$ (a) und Zustandsgleichung $p(e)$ (b) für $g = 3.3$ und $\mu = 0$ . . . . .	24
2.3	Effektives Potential für ausgewählte Werte von $T$ (a) und Zustandsgleichung $p(e)$ (b) für $g = 3.3$ und $\mu_q = 250$ MeV . . . . .	25
2.4	Effektives Potential als Funktion des $\phi$ -Feldes bei $\vec{\pi} = 0$ und variierender Kopplungskonstante $g$ . . . . .	28
3.1	Reaktionsebene einer semizentralen $Au + Au$ Kollision für einen Stoßparameter $b = 7$ fm . . . . .	39
3.2	Verschiedene Schritte des Coarse Graining . . . . .	45
3.3	Zeitentwicklung des $\sigma$ -Feldes . . . . .	46
3.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung für die chiralen Felder . . . . .	48
3.5	Zeitentwicklung der Energiedichte . . . . .	49
3.6	Zeitentwicklung Impulsanisotropie $\epsilon_p$ . . . . .	51
3.7	Anregungsfunktion von $v_2/\langle p_t \rangle$ . . . . .	52
4.1	Das effektive Potential $V_{\text{eff}}$ bei $g = 3.7$ und $\mu = 0$ . . . . .	58
4.2	Dynamisches bestimmtes effektives Potential . . . . .	60
4.3	Zeitentwicklung der Korrelationslänge $\xi$ . . . . .	62
5.1	Temperaturfluktuationen im kosmischen Mikrowellenhintergrund . . .	65
5.2	Zeitliche Entwicklung der Baryonendichte . . . . .	70
5.3	Zeitliche Entwicklung der gemittelten Energie- und Baryonendichte .	71
5.4	Bestimmung der Stärke der Inhomogenitäten . . . . .	72
5.5	Inhomogenität der Baryonendichte für die Anfangsbedingungen I . . .	74
5.6	Inhomogenität der Baryonendichte für die Anfangsbedingungen II . .	75
5.7	Inhomogenität der Energiedichte für die Anfangsbedingungen I und II	76





## EINLEITUNG

*For man is but the servant and interpreter of nature:  
what he does and what he knows is only what he has observed of  
nature's order in fact or in thought;  
beyond this he knows nothing and can do nothing.*

Francis Bacon (1560-1626)

Die Physik als Naturwissenschaft versucht, Naturvorgänge - welche entweder in ihrem natürlichen Ablauf eintreten oder gezielt in Experimenten ausgelöst werden - zu beschreiben und zu deuten. Als physikalisch richtig wird eine Theorie dann bezeichnet, wenn ihre Vorhersagen mit allen möglichen Meßergebnissen aus Experimenten übereinstimmen. Allerdings ist es in der Praxis unmöglich, sämtliche möglichen Experimente durchzuführen. Daher besitzen alle Theorien natürlicherweise einen begrenzten Gültigkeitsbereich, der durch immer genauere Experimente immer schärfer definiert wird.

Ein Beispiel hierfür ist die Newtonsche Mechanik, die etwa 200 Jahre lang überdauerte, bevor experimentell Abweichungen festgestellt wurden. Die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie mit einem größeren Gültigkeitsbereich wurden entwickelt. Auch im atomaren Bereich versagt die Mechanik, und die Quantenmechanik wurde zur Beschreibung der hier auftretenden Prozesse notwendig.

Durch die moderne Physik ist es heute möglich, einen Großteil der Naturvorgänge mit vier fundamentalen Wechselwirkungen zu beschreiben. Die schwächste dieser Wechselwirkungen (oder Kräfte) ist die Gravitationskraft (beschrieben durch die Allgemeine Relativitätstheorie). Außerdem gibt es noch die drei Quantenfeldtheorien der Teilchenphysik, welche die schwache, die elektromagnetische (Quantenelektrodynamik, QED) und die starke Wechselwirkung (Quantenchromodynamik, QCD) beschreiben. Die QED und die schwache Wechselwirkung konnten zur elektroschwachen Wechselwirkung vereint werden. Diese wiederum konnte mit der QCD zum Standardmodell der Teilchenphysik verbunden werden. Eine Vereinigung von Standardmodell und Gravitationstheorie ist bisher nicht gelungen.

Das Standardmodell und die in ihm enthaltenen verschiedenen Quantenfeldtheorien werden bis heute immer wieder neuen Experimenten und theoretischen Überlegungen unterzogen. In Beschleunigerexperimenten versucht man, höhere Meßgenauigkeiten und höhere Energien zu erreichen und somit Abweichungen von den Vorhersagen festzustellen. Durch kosmologische Beobachtungen und Theorien wird versucht, die Entwicklung des Universums zu verstehen und zu beschreiben. Dazu ist es aber notwendig das Standardmodell der Teilchenphysik zu erweitern und somit den Gültigkeitsbereich des Standardmodells einzuschränken.

Neben den Theorien für die vier fundamentalen Kräfte gibt es noch eine weitere wichtige Theorie - die Thermodynamik. Sie ist zwar keine fundamentale Theorie - im Prinzip ist sie aus mikroskopischen Theorien ableitbar - und in ihrer Anwendung auf Gleichgewichte beschränkt, aber dafür eine bemerkenswert universelle Theorie. Ihre Verallgemeinerung findet sie in der statistischen Mechanik für das Nichtgleichgewicht. Was man unter einem Gleichgewicht versteht, läßt sich am besten an einem Beispiel erläutern [1]. Füllt man beispielsweise Gas in eine Flasche so ist dies ein dynamischer Prozeß: das Gas fließt, der Druck an den verschiedenen Stellen der Flasche ist verschieden und ändert sich zeitlich auf eine sehr komplizierte Weise. Wird nun die Flasche verschlossen und vergeht hinreichend viel Zeit, so weiß man, daß die zeitlichen (und bei Vernachlässigung der Schwerkraft die räumlichen) Inhomogenitäten des Drucks (und der Temperatur) verschwinden. Ist dieser Endzustand erreicht, wird er sich von sich aus nicht mehr ändern: ein mechanisches und thermodynamisches Gleichgewicht hat sich eingestellt.

Wie sieht nun die Thermodynamik für eine der fundamentalen Kräfte aus? Im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung sind zum Beispiel Plasmen möglich. Für gewöhnlich sind Elektronen an den Atomkernen gebunden. Bei ausreichend hohen Temperaturen können die Atome ionisiert werden, d.h. die Elektronen sind nicht länger gebunden, sondern können sich mehr oder weniger frei bewegen.

Im Falle der starken Wechselwirkung sucht man nach einem ähnlichen Zustand - bei ausreichend hohen Temperaturen und/oder Dichten vermutet man die Existenz des so genannten Quark-Gluon-Plasmas. Im Grundzustand sind die Quarks und Gluonen in den Hadronen - wie zum Beispiel Protonen, Neutronen und Pionen - gebunden. Aufgrund der Struktur der starken Wechselwirkung gibt es aber nicht die Möglichkeit, ein Hadron zu "ionisieren" und es so in seine Bestandteile - die Quarks und Gluonen - aufzuspalten. Bisher wurde noch kein Quark oder Gluon in einem freien Zustand beobachtet, alle Nachweise für die Existenz von Quarks und Gluonen können nur indirekt gewonnen werden. Quarks und Gluonen sind immer

in Hadronen gebunden - man bezeichnet dies als *Confinement*.

Auf der theoretischen Seite ist dies dadurch zu verstehen, daß es sich bei der QCD um eine so genannte nichtabelsche Eichtheorie handelt - das heißt, die Teilchen, welche die Wechselwirkung vermitteln (Eichbosonen), wechselwirken auch selbst direkt miteinander (anders als die Photonen in der elektromagnetischen Theorie). Dies führt dazu, daß die Kraft zwischen Quarks und Gluonen mit wachsender Entfernung zunimmt und diese somit nicht in freien Zuständen vorkommen können. Für sehr kleine Abstände ist die Kraft zwischen den Quarks und Gluonen hingegen sehr klein. Daher hofft man, daß, wenn man viele Hadronen in ein sehr kleines Volumen bringt, dies ausreicht, um dafür zu sorgen, daß sich die darin enthaltenen Quarks und Gluonen ausreichend nahe kommen, damit die Kraft zwischen ihnen sehr klein wird. Die Quarks und Gluonen könnten sich dann mehr oder weniger frei in diesem Volumen bewegen, und man spricht von einem Quark-Gluon-Plasma (QGP).

Die QCD besitzt neben dem Confinement noch eine ungewöhnliche Eigenschaft. Obwohl die Quarks an sich sehr leicht ( $\approx 5-10$  MeV) und die Gluonen masselos sind, haben die aus ihnen aufgebauten Hadronen eine sehr große Masse - dies bezeichnet man als spontane Brechung der Chiralen Symmetrie. Etwas formaler ausgedrückt besitzt die Lagrangedichte dieser Theorie eine Symmetrie, welche sich nicht in den direkt beobachtbaren Teilchen, also dem Grundzustand der Theorie, wiederfindet. Bei ausreichend hohen Dichten und/oder Temperaturen hofft man nun, daß auch die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird. Numerische Berechnungen bei endlichen (also nichtverschwindenden) Temperaturen (und verschwindender Dichte) haben gezeigt, daß der Deconfinement Phasenübergang und die Restaurierung der Chiralen Symmetrie bei der gleichen Temperatur erfolgen. Das Quark-Gluon-Plasma besteht also aus mehr oder weniger freien Quarks und ist außerdem chiral symmetrisch.

Das Problem mit der QCD ist, daß sie aufgrund der nichtabelschen Eichgruppe wesentlich komplizierter zu lösen ist als z.B. die QED. Und bereits die QED ist eine recht einfach erscheinende Theorie - es tritt nur eine Art von Ladung auf, und die Eichbosonen wechselwirken nicht direkt miteinander - deren Lösung jedoch viele Probleme bereitet. Im Gegensatz zur QCD ist im Falle der QED eine störungstheoretische Beschreibung möglich, die es heute erlaubt, Hochpräzisionsmessungen durchzuführen, um diese Theorie zu testen. Im Falle der QCD ist die störungstheoretische Beschreibung nur in bestimmten Grenzfällen möglich, da Quarks und Gluonen sehr stark miteinander wechselwirken und die Störungsreihe damit nicht sinnvoll abgebrochen werden kann. Im störungstheoretischen Bereich ist die QCD zur Zeit auf ein Promille genau vermessen (die QED ist im Vergleich hierzu auf  $10^{-6}$  Promille

genau vermessen). Hinzu kommt die Tatsache, daß die Gluonen als Eichbosonen miteinander wechselwirken. Störungstheorie ist innerhalb der QCD zum Beispiel bei ausreichend hohen Impulsüberträgen möglich, wie beispielsweise bei hochenergetischen Elektron-Elektron oder Elektron-Proton Stößen.

Bei endlichen Temperaturen und Dichten ist es bisher nicht möglich, die QCD zu lösen. Bei hohen Temperaturen oder Dichten allein ist eine störungstheoretische Beschreibung möglich. Außerdem besteht die Möglichkeit der numerischen Lösung auf dem Gitter bei endlichen Temperaturen und verschwindenden Dichten. Aber für endliche Temperatur *und* endliche Dichten ist bis heute noch keine befriedigende Lösung gefunden worden. Dies führt dazu, daß man den Zustand des Quark-Gluon-Plasmas nicht mit der QCD direkt beschreiben kann. Darüber hinaus wirft auch der experimentelle Nachweis des Quark-Gluon-Plasmas Probleme auf. Die einzige Möglichkeit, ausreichend viel Kernmaterie auf einem ausreichend kleinen Volumen zu komprimieren, besteht darin, große - also schwere - Kerne miteinander kollidieren zu lassen. Durch die hohen Kollisionsenergien hofft man, ausreichend hohe Dichten und/oder Temperaturen zu erzeugen, um das Quark-Gluon-Plasma in einem extrem kleinen Volumen ( $\approx 10^{-45} \text{ m}^3$ ) zu erzeugen. Dies führt dazu, daß die Beobachtung dieses möglichen neuen Zustandes nicht direkt erfolgen kann. Der Bereich hoher Dichte und/oder Temperatur wird aufgrund der Expansion schließlich wieder abkühlen, und die dabei entstehenden Teilchen werden in Detektoren gemessen. Aus den beobachteten Teilchen müssen nun Rückschlüsse gezogen werden, was während der Kollision geschehen ist. Man versucht nun mit Hilfe vieler verschiedener Observablen zu entscheiden, ob der Übergang zum Quark-Gluon-Plasma tatsächlich stattgefunden hat.

Die Experimente hierzu werden in den letzten Jahren am CERN in Genf und am BNL (Brookhaven National Lab) in Stony Brook durchgeführt. Dort gibt es eine Vielzahl von experimentellen Gruppen, welche mit unterschiedlichen technischen Grenzen und Genauigkeiten die aus den Kollisionen resultierenden Teilchen messen. Man versucht hierbei unter anderem, eine Abhängigkeit der Observablen von der Kollisionsenergie festzustellen, um so das Quark-Gluon-Plasma nachzuweisen.

Neben dem Problem des indirekten experimentellen Nachweises wirft der Aufbau der Experimente an sich eine Frage auf. Kommt bei einer hochenergetischen Kern-Kern-Kollision ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht zustande? Die meisten Studien gehen hiervon aus oder versuchen Argumente dafür zu finden, daß dies der Realität entspricht.

Die Zielsetzung dieser Arbeit ist es, Nichtgleichgewichtseffekte des chiralen Pha-

senübergangs bei endlichen Temperaturen und Dichten zu untersuchen. Der Modellansatz, welcher hierfür verwendet wird, beinhaltet zwei recht unterschiedliche Herangehensweisen. Zum einen kann die Dynamik von stark wechselwirkender Materie im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht durch hydrodynamische Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Warum dies der Fall ist, wird in Abschnitt 2.1 etwas genauer diskutiert werden. Mit Hilfe der Hydrodynamik können kollektive Effekte besonders gut untersucht werden, ohne eine nähere Kenntnis über die mikroskopischen Vorgänge zu besitzen. Auf der anderen Seite steht das in den Abschnitten 2.3 -2.5 vorgestellte lineare  $\sigma$ -Modell, das chiral symmetrisch ist und die starke Wechselwirkung in bestimmten Energiebereichen gut beschreibt. Die Wechselwirkung zwischen den Quarks (oder Nukleonen) wird hierbei von den so genannten chiralen Felder vermittelt.

Werden nun beide Ansätze miteinander verbunden (Abschnitt 2.6), so erhält man eine dynamische Beschreibung für die Brechung der chiralen Symmetrie. Während die durch die Hydrodynamik beschriebenen Quarks sich weiterhin in einem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinden, ist dies für die chiralen Felder nicht länger der Fall. Die chiralen Felder fungieren dabei als Ordnungsparameter für den Übergang zwischen der chiral gebrochenen und der chiral restaurierten Phase. Das Phasendiagramm (Abschnitt 2.5), welches sich aus diesem Modell ergibt, stimmt mit den Ergebnissen gittereichtheoretischer Berechnungen qualitativ überein. Für eine quantitative Übereinstimmung ist dieses Modell leider nicht geeignet. Da sich die chiralen Felder nicht länger im Gleichgewicht befinden müssen, bietet das Modell im Gegenzug aber die Möglichkeit, Nichtgleichgewichtseffekte zu untersuchen. Diese Effekte können die Dynamik einer Kern-Kern-Kollision merklich beeinflussen, was in dieser Arbeit untersucht werden soll.

Mit der Einbeziehung von Nichtgleichgewichtseffekten für den Ordnungsparameter geht auch die Tatsache einher, daß dieser um den Gleichgewichtszustand fluktuiert. Die Stärke dieser Fluktuationen wird von den zugrundeliegenden physikalischen Prozessen bestimmt. Umgekehrt ist es aber auch möglich, aus den Fluktuationen Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden Prozesse zu ziehen. Darum wird es im Wesentlichen in dieser Arbeit gehen. Die Fluktuationen werden als anfängliche (oder primordiale) Fluktuationen in den Anfangsbedingungen vorgegeben. Je nach dem, wie der jeweilige Übergang zwischen der chiral gebrochenen und chiral restaurierten Phase aussieht, werden diese anfänglichen Fluktuationen beeinflusst. Dies wiederum wird auch Auswirkungen auf die Dynamik der an die chiralen Felder gekoppelten Quarks haben. Ziel dieser Arbeit ist es nun, die möglichen unterschiedlichen Auswir-

kungen von Nichtgleichgewichtsprozessen - und den damit einhergehenden Fluktuationen - auf die Dynamik des chiralen Phasenübergangs zu untersuchen. Zunächst sollen dazu in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen erläutert werden.

In Kapitel 3 werden dann erste Untersuchungen zum Einfluß der Nichtgleichgewichtsbeschreibung auf die kollektive Entwicklung eines Systems aus Quarks und Antiquarks durchgeführt. Die zeitliche Entwicklung der Energiedichte wird sich vom Gleichgewichtsfall deutlich unterscheiden. Außerdem wird die zeitliche Entwicklung der chiralen Felder diskutiert werden, um ein genaueres Verständnis für die Dynamik der zeitlichen Entwicklung zu erhalten. Abschließend wird dann noch der mögliche Einfluß auf eine experimentelle Observable, den elliptischen Fluß, untersucht.

Die Fluktuationen des chiralen Ordnungsparameters selbst werden in Kapitel 4 genauer betrachtet werden. Man vermutet für das Phasendiagramm von stark wechselwirkender Materie einen kritischen Endpunkt für endliche Temperaturen und Dichten. In der Thermodynamik sind kritische Punkte immer mit einem kritischen Verhalten des Ordnungsparameters verbunden. Selbst kleine Störungen des Ordnungsparameters am kritischen Punkt haben große Auswirkungen auf ein System. Allerdings gilt dies zunächst nur für ein System im thermischen Gleichgewicht. Im Falle einer Kern-Kern-Kollision dürfte sich das System zum einen nicht im Gleichgewicht befinden, zum anderen expandiert es sehr schnell. Daher soll in Kapitel 4 untersucht werden, wie die Fluktuationen des Ordnungsparameters von der Existenz des kritischen Punktes für ein endliches und expandierendes System beeinflusst werden.

Schließlich wird in Kapitel 5 untersucht werden, wie sich die Fluktuationen des Ordnungsparameters auf Inhomogenitäten in der Energie- und Baryonendichte der Quarks und Antiquarks auswirken. Auch hier sollte die Dynamik des Systems und die Stärke der Inhomogenitäten vom jeweiligen Phasenübergang beeinflusst werden. Die unterschiedlich starken Inhomogenitäten wiederum sollten sich in den anschließend diskutierten experimentellen Observablen widerspiegeln.

Abschließend werden in Kapitel 6 die Ergebnisse noch einmal zusammengefaßt werden und ein Ausblick auf weiterführende Untersuchungen gegeben.

# DYNAMISCHE BESCHREIBUNG DER CHIRALEN SYMMETRIEBRECHUNG

Wie bereits in der Einleitung dargelegt wurde, liegen die Beweggründe für die Untersuchung von hochenergetischen Kern-Kern Kollisionen darin, mehr über die Zustandsgleichung und die Eigenschaften von stark wechselwirkender Materie bei hohen Temperaturen und Dichten herauszufinden. Die Quantenchromodynamik (QCD) ist bis heute der beste Kandidat für die Theorie der starken Wechselwirkung und sollte daher alle Phasen von Kernmaterie bei allen Dichten und Temperaturen beschreiben. In der Praxis läßt sich die QCD bisher allerdings nur in einigen Grenzwerten, bei denen eine störungstheoretische Beschreibung möglich ist, analytisch lösen. Bei ausreichend hohen Temperaturen und verschwindender (oder zumindest sehr kleiner) Baryondichte kann sie außerdem auf einem Gitter diskretisiert werden. Bisher ist es nicht möglich, die QCD bei endlichen Baryondichten und in einer Echtzeitbeschreibung anzuwenden, woraus die Notwendigkeit entsteht, effektive Modelle zu entwickeln, welche nur den grundlegenden Eigenschaften der QCD - wie der chiralen Symmetrie (siehe Abschnitt 2.2) - Rechnung tragen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das System auf kollektive Observablen zu reduzieren, wie es bei der hydrodynamischen Beschreibung der Fall ist. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine dynamische Beschreibung für den Phasenübergang von einer chiral gebrochenen zu einer chiral restaurierten Phase zu untersuchen.

Hierzu werden zwei bewährte Ansätze miteinander verbunden. Auf der einen Seite steht die relativistische Hydrodynamik, die sich bei der Beschreibung von Kern-Kern-Kollisionen als ein erfolgreicher Ansatz erwiesen hat. Auf der anderen Seite wird das lineare  $\sigma$ -Modell verwendet, um die Phänomenologie der starken Wechselwirkung bei kleinen Energien - einschließlich der chiralen Symmetrie - mit einem effektiven Ansatz zu beschreiben.

Beide Ansätze an sich bieten bereits einen wertvollen Einblick in die Physik von heißer und dichter Kernmaterie. Verbindet man nun die hydrodynamische Beschreibung, mit dem linearen  $\sigma$ -Modell, so erhält man eine effektive Beschreibung mit deren Hilfe die Brechung der chiralen Symmetrie dynamisch beschrieben werden kann.

In diesem Kapitel sollen nun zuerst die Grundlagen der relativistischen Hydrodynamik (Abschnitt 2.1) und des linearen  $\sigma$ -Modells (Abschnitt 2.3) getrennt voneinander vorgestellt werden. Der Diskussion des linearen  $\sigma$ -Modells ist Abschnitt 2.2 vorangestellt, in dem kurz die Konzepte der chiralen Symmetrie erläutert werden sollen. Nach der Diskussion der Thermodynamik des  $\sigma$ -Modells (Abschnitte 2.4 und 2.5) wird dann das in dieser Arbeit verwendete Modell - die so genannte *Chirale Hydrodynamik* (Abschnitt 2.6) vorgestellt. Abschließend wird noch diskutiert, wie sich thermische Fluktuationen des chiralen Feldes auf das effektive Potential auswirken (Abschnitt 2.7).

## 2.1 Ideale Relativistische Hydrodynamik

Um eine Kern-Kern-Kollision mit einem rein hydrodynamischen Ansatz beschreiben zu können, muß eine wichtige Voraussetzung erfüllt sein: Das System muß sich in einem lokalen thermischen Gleichgewicht befinden. Das ist dann der Fall, wenn die Anzahl der in den ersten Kollisionen erzeugten Teilchen ausreichend groß ist. Genauer gesagt muß die mittlere freie Weglänge eines Teilchens klein sein im Vergleich zur Größe bzw. Lebensdauer des betrachteten Systems. Ist dies der Fall, so können die Teilchen durch wiederholte Kollisionen miteinander ein lokales thermisches Gleichgewicht erreichen.

An dieser Stelle sollte bemerkt werden, daß nicht mit vollkommener Sicherheit geklärt ist, ob in einer Kern-Kern-Kollision ein thermisches (und chemisches) Gleichgewicht erreicht wird. Hierzu kann man sich aber auf eine Abschätzung der anfänglichen Dichte, der Wirkungsquerschnitte und der daraus bestimmten mittleren freien Weglänge von  $\lambda \approx 0.8$  fm stützen (vgl. hierzu [2]). Verglichen mit der hydrodynamisch abgeschätzten Lebensdauer von  $\tau = 10-20$  fm sollten die Teilchen hinreichend oft streuen, so daß ein thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

Nachdem ein Gleichgewicht erreicht ist, kann das System durch thermodynamische Felder beschrieben werden. Dies sind die Temperatur  $T(x)$ , die chemische Potentiale  $\mu_i(x)$ , die in Verbindung mit erhaltenen Ladungen stehen, und die Viererflußgeschwindigkeit  $u_\mu(x)$ . Die zeitliche Entwicklung dieser thermodynamischen Variablen wird durch hydrodynamische Bewegungsgleichungen bestimmt. Dies ist so lange der Fall, bis das System so ausgedünnt ist, daß die Bedingungen für die Annahme eines lokalen thermischen Gleichgewichtes nicht mehr erfüllt sind: sobald die mittlere freie Weglänge eines Teilchens groß im Vergleich zur Größe des Systems wird, entkoppeln die Teilchen thermisch und verhalten sich wie freie Teilchen. Ab



diesem Zeitpunkt kann das System nicht mehr durch eine hydrodynamische Beschreibung charakterisiert werden.

Neben der Tatsache, daß für die Beschreibung einer Kern-Kern Kollision mit Hilfe relativistischer idealer Hydrodynamik nur wenige thermodynamische Variablen benötigt werden, gibt es noch einen weiteren wichtigen Vorteil. Abgesehen von der Annahme eines thermodynamischen Gleichgewichtes und der Abwesenheit von dissipativen Effekten wird nur noch die Zustandsgleichung der zu beschreibenden Materie (in diesem Fall stark wechselwirkende hadronische Materie) benötigt. Sobald die Anfangsbedingungen und die Zustandsgleichung festgelegt sind, wird die Dynamik des Systems allein durch die Zustandsgleichung bestimmt. Genauere Kenntnisse über die Teilchenkollisionen auf einer mikroskopischen Ebene sind nicht mehr explizit notwendig. Damit ist es möglich, zahlreiche unterschiedliche Zustandsgleichungen, die aus verschiedenen effektiven Ansätzen entwickelt worden sind, zu testen.

## Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für eine relativistische Flüssigkeit sind gegeben durch die Gleichungen für Energie- und Impulserhaltung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

und die vorkommenden erhaltenen Ladungen

$$\partial_\mu j_i^\mu = 0 \quad , \quad (2.2)$$

wobei  $T^{\mu\nu}$  der Energie-Impuls-Tensor und  $j_i^\mu$  die zu den erhaltenen Ladungen gehörenden Viererstromdichten darstellen.

Geht man nun davon aus, daß es sich um eine ideale Flüssigkeit handelt (d.h. das System befindet sich im lokalen kinetischen Gleichgewicht), ist der Energie-Impuls-Tensor durch

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

und die Viererstromdichte durch

$$j_i^\mu = n_i u^\mu \quad (2.4)$$

gegeben. Hierbei sind  $\epsilon$  die Energiedichte,  $p$  der Druck und  $n_i$  die Anzahldichte der Ladung  $i$  (zum Beispiel Baryonen- oder Quarkdichte), jeweils angegeben im lokalen Ruhesystem, und  $u^\mu$  die Vierergeschwindigkeit. Abgeschlossen werden die

Gleichungen (2.1) und (2.2) durch die Zustandsgleichung der Materie, die den Druck mit den Dichten verbindet:  $p = p(e, n_i)$ .

Grundsätzlich ist es möglich, kleine Abweichungen vom lokalen thermischen Gleichgewicht zu berücksichtigen und somit dissipative Effekte einzubeziehen. Allerdings ist diese dissipative, relativistische Hydrodynamik in der konkreten Anwendung sehr schwer umzusetzen [3], aber seit kurzem wird auch dieses Problem bearbeitet, siehe zum Beispiel [4, 5, 6].

Aber auch schon die Lösung der Gleichungen der idealen relativistischen Hydrodynamik in drei Dimensionen gestaltet sich als schwieriges Problem. In vielen Ansätzen werden bestimmte Annahmen über Symmetrien des zu beschreibenden Systems gemacht (die oft nur annähernd gültig sind), um somit das Problem auf zwei oder eine räumliche Dimension zu reduzieren. Eine Vereinfachung ist zum Beispiel die Annahme einer Zylindersymmetrie bei der Beschreibung von zentralen Kollisionen kugelförmiger Kernen.

Ein weiterer häufig verwendeter Ansatz ist das Bjorken-Modell [7]. Bei diesem Modell geht man davon aus, daß zwei Kerne zentral miteinander kollidieren. Aufgrund der endlichen Abstopfung der beiden Kerne, werden sich die in den Kernen enthaltenen Baryonen weiterhin mit der anfänglichen Geschwindigkeit bewegen. Allerdings führen mikroskopische Stoßprozesse dazu, daß nettoladungsfreie angeregte Materie in dem Überlappbereich der beiden Kerne erzeugt wird. Für diese Materie nimmt man nun an, daß ihre Flußgeschwindigkeit wie  $v_z = z/t$  skaliert, wobei  $z$  in Richtung der Strahlachse zeigt. Diese Annahme für die Flußgeschwindigkeit  $v_z$  führt zu einer Boostinvarianz - also einer Invarianz bezüglich Transformation in ein anderes Koordinatensystem, das sich mit einer anderen Geschwindigkeit parallel zum ursprünglichen Koordinatensystem bewegt - des Systems: Druck und Energiedichte sind nicht mehr von der longitudinalen Koordinate  $z$  abhängig, vorausgesetzt man vergleicht sie zur gleichen Eigenzeit  $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ . Die Lösung der Bewegungsgleichungen wird damit unabhängig bezüglich Transformationen entlang der Strahlachse und es reicht aus, die Bewegungsgleichungen in der transversalen Ebene bei  $z = 0$  zu lösen. Ein erheblicher Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, daß man nur noch Aussagen über transversale Effekte machen kann, da die Ergebnisse unabhängig von der betrachteten Rapidität sind. Bei ausreichend hohen Energien (RHIC) stimmen die Ergebnisse von boostinvarianten und nicht-boostinvarianten Rechnungen überein [2]. Im folgenden werden die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe des in [8] vorgestellten Verfahrens in drei Dimensionen gelöst, hierauf wird jedoch später genauer eingegangen.

Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen in der obigen Form (2.1) und (2.2) sind für die numerische Lösung noch nicht in einer geeigneten Form. Die Rechnungen sollen in einem frei gewählten, aber festgelegten Bezugssystem durchgeführt werden. Dazu werden die folgenden Größen definiert:

$$\begin{aligned} E &\equiv T^{00} = \gamma^2(e + p) - p \\ \mathbf{M} &\equiv T^{i0} = \gamma^2(e + p) \mathbf{v} \\ R &\equiv j^0 = \gamma n \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei  $E$  die Energiedichte,  $\mathbf{M}$  die Momentdichte und  $R$  die Baryonendichte (oder Quarkdichte) im gewählten Bezugssystem sind. Die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit ist gegeben durch  $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$  wobei  $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$  und  $\mathbf{v}$  die kollektive (mittlere) Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist. Hiermit ergibt sich für die Bewegungsgleichungen (2.1) und (2.2) die folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E\mathbf{v}) &= -\nabla(p\mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla_i(M_j \mathbf{v})_j &= -\nabla p \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \nabla(R\mathbf{v}) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.6}$$

In dieser Form lassen sich die Bewegungsgleichungen numerisch mit einem Algorithmus für nichtrelativistische Hydrodynamik lösen. Dabei muß allerdings bedacht werden, daß, um die Gleichungen für  $E$ ,  $\mathbf{M}$  und  $R$  im dazugehörigen Bezugssystem zu lösen, die Zustandsgleichung  $p(e, n)$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bekannt sein müssen. Die Zustandsgleichung hängt jedoch von den Dichten  $e$  und  $n$  ab, welche im lokalen Ruhesystem der Flüssigkeit gemessen werden. Daher muß lokal jeweils von dem für die Rechnungen gewählten System in das lokale Ruhesystem transformiert werden, um somit  $e, n$  und  $\mathbf{v}$  aus  $E$ ,  $\mathbf{M}$  und  $R$  zu bestimmen. Im nichtrelativistischen Limes gibt es keinen Unterschied zwischen  $e$  und  $E$  oder  $n$  und  $R$ , die Zustandsgleichung kann also direkt in den Bewegungsgleichungen verwendet werden. Die Wahl des Bezugssystems, in dem die Rechnungen ausgeführt werden, hängt vom untersuchten System ab. Zum Beispiel bietet sich bei der Untersuchung von Kern-Kern-Kollisionen das Schwerpunktsystem der beiden Kerne an, da die Diskretisierung auf einem in alle Raumrichtungen äquidistanten Gitter erfolgt und die Kerne durch die hohen Geschwindigkeiten mitunter sehr stark  $\gamma$ -kontrahiert werden.

## Transformationen in das Ruhesystem der Flüssigkeit

Die Transformation zwischen dem für die numerische Rechnung gewählten Bezugssystem und dem lokalen Ruhesystem ist im wesentlichen durch die Gleichungen (2.5) gegeben. Diese 5 nichtlinearen Gleichungen - die Nichtlinearität wird durch die Zustandsgleichung  $p(e, n)$  verursacht - müssen numerisch gelöst werden. In der numerischen Umsetzung muß diese Transformation mehrfach in jedem Zeitschritt und jedem Raumpunkt angewendet werden. Es bietet sich daher an, dieses Transformationsproblem zunächst zu vereinfachen.

Zum einen sind  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{v}$  parallel

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{M}| \cdot |\mathbf{v}| = \gamma^2(e + p)v^2 = (e + p)(\gamma^2 - 1) = E - e \quad , \quad (2.7)$$

woraus

$$e = E - |\mathbf{M}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (2.8)$$

folgt. Für die Baryonendichte gilt

$$n = R/\gamma = R\sqrt{1 - v^2} \quad . \quad (2.9)$$

Die lokalen Ruhesystemsgrößen können so durch  $E$ ,  $\mathbf{M}$  und  $R$  ausgedrückt werden, und hängen über die Geschwindigkeit voneinander ab. Verwendet man nun, daß

$$|\mathbf{M}| = (e + p)\gamma^2 v = (E + p)v \quad (2.10)$$

woraus sich

$$v = \frac{|\mathbf{M}|}{E + p(e, n)} \quad (2.11)$$

ergibt und verwendet die Gleichungen (2.8) und (2.9), so erhält man für die Fixpunktgleichung von  $v$  die folgende Form

$$v = \frac{|\mathbf{M}|}{E + p(E - |\mathbf{M}| \cdot |\mathbf{v}|, R\sqrt{1 - v^2})} \quad . \quad (2.12)$$

Aus dem so bestimmten Betrag der Geschwindigkeit  $v$  läßt sich die vektorielle Geschwindigkeit durch  $\mathbf{v} = v\mathbf{M}/|\mathbf{M}|$  bestimmen und damit ergeben sich mit den Gleichungen (2.8) und (2.9) die Dichten  $e$  und  $n$ . Die Zustandsgleichung  $p(e, n)$  liefert dann die letzte Unbekannte, den Druck  $p$ .

## Algorithmus zur Lösung der hydrodynamischen Gleichungen

Für die Lösung hydrodynamischer Systeme müssen die diskretisierten Versionen der Gleichungen (2.6) gelöst werden. Die Form der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen macht es jedoch unmöglich, die Gleichungen direkt zu diskretisieren. Zur Lösung der hydrodynamischen Gleichungen sind komplexe Algorithmen notwendig. Einer dieser Algorithmen ist der so genannte SHASTA [9, 10], der in dieser Arbeit Verwendung findet. Er wird auf einem so genannten Eulerschen Gitter gelöst, d.h. die Größen  $E$ ,  $\mathbf{M}$  und  $R$  werden auf einem raumfesten Gitter in einem für die numerischen Rechnungen festgelegten Bezugssystem durchgeführt. Hierfür bietet sich zum Beispiel das Schwerpunktsystem an. Die konkrete numerische Umsetzung wurde von Rischke et al. (siehe hierzu [8, 11]) durchgeführt und ausführlich getestet. Eine genaue Beschreibung der Umsetzung, ist in der Diplomarbeit von Y. Pürsün [12] zu finden.

Um die Gleichungen (2.6) zu lösen, wird das Problem durch das so genannte Operatorsplitting auf ein eindimensionales Problem reduziert. Die Gleichungen werden im wesentlichen nacheinander in jeder Raumrichtung getrennt gelöst (für Details hierzu siehe [8]). Daher muß ein numerischer Algorithmus eindimensionale Gleichungen der Form

$$\partial_t U + \partial_x(Uv + f) = 0 \quad (2.13)$$

lösen. Hierbei ist  $U$  eine der Größen  $E$ ,  $\mathbf{M}$  oder  $R$  und  $f$  stellt einen der Quellterme auf der rechten Seite der Gleichungen (2.6) dar.

In dem Ansatz von Boris und Book [9] zur numerischen Lösung von Gleichung (2.13) wird die Methode der Flußkorrektur (Flux Corrected Transport - FCT) eingeführt. Auf eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus wird hier verzichtet und nur die prinzipielle Struktur des SHASTA vorgestellt (siehe hierzu [12]). Dabei ist die Idee, eine Diffusion während des Transportschrittes auszuführen und dann diese durch eine Antidiffusion nach dem Transportschritt wieder aufzuheben. Bei diesem Ansatz dürfen keine negativen Dichten oder unphysikalischen Oszillationen auftreten. Außerdem muß der Algorithmus massenerhaltend sein. Dieser Algorithmus des FCT-Typs wurde von Boris und Book **SH**arp **A**nd **S**mooth **T**ransport **A**lgorithm (SHASTA) genannt. Die Vorgehensweise des SHASTA ist dabei die folgende: Zunächst werden die Dichten in den Zellen mit den entsprechenden Geschwindigkeiten transportiert und diffundiert. Die Diffusion glättet Unstetigkeiten und Oszillationen während des Transportschrittes aus und erhöht damit die Stabilität des Verfahrens. Dann wird die Diffusion durch eine korrigierende Antidiffusion

rückgängig gemacht. Dies ist notwendig, da der Diffusionsterm einen echten Fehler darstellt. Es wird so korrigiert, daß keine neuen Extrema entstehen und die Dichten positiv bleiben.

Um die Konvergenz des SHASTA zu gewährleisten (und damit keine negativen Dichten entstehen) wird die folgende Einschränkung für die Diskretisierung notwendig:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \quad . \quad (2.14)$$

Diese Einschränkung ist bei der Lösung der hier vorkommenden hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen notwendig. In [13] wurde gezeigt, daß der Zeitschritt  $\Delta t$  kleiner sein muß als die Gitterweite  $\Delta x$ , um konvergente Lösungen zu erhalten. Der SHASTA benötigt aber die stärkere Konvergenzbedingung (2.14). Allerdings kann das Verhältnis  $\lambda$  nicht beliebig klein gewählt werden [8], da Materie maximal mit Lichtgeschwindigkeit in das Vakuum propagieren kann. Der kausale Materietransport kann nur über eine Distanz von  $\Delta t = \lambda \Delta x < \Delta x$  pro Zeitschritt erfolgen. Allerdings wird in den gängigen hydrodynamischen Algorithmen nach jedem Zeitschritt über die Zellen gemittelt. Das heißt, selbst wenn ein Algorithmus die Materie *während* eines Zeitschrittes kausal in das Vakuum transportiert, wird am *Ende* des Zeitschrittes die Materie akausal über eine Entfernung  $\Delta x > \lambda \Delta x$  propagiert. Daher kann der Parameter  $\lambda$  nicht beliebig klein gewählt werden. Die Arbeiten [8, 11, 12] zeigen, daß ein Wert von

$$\lambda = 0.4 \quad (2.15)$$

gute Resultate liefert. In den folgenden Berechnungen wird dieser Wert von  $\lambda$  verwendet. Außerdem wird  $\Delta x = 0.2$  fm gewählt und damit  $\Delta t = 0.08$  fm.

## 2.2 Chirale Symmetrie

Bevor im nächsten Abschnitt das chiral symmetrische lineare  $\sigma$ -Modell vorgestellt wird, soll in diesem Abschnitt zunächst erläutert werden, was man unter den Begriffen Chiralität und chirale Symmetrie versteht. Als Chiralität - oder auch Händigkeit - bezeichnet man die Eigenschaft bestimmter Gegenstände oder Systeme, deren Spiegelbild durch Drehung nicht mit dem Original zur Deckung gebracht werden kann. Der Begriff Spiegelbild kann sich hierbei zum einen auf eine tatsächliche Spiegelung des Raumes - man spricht auch von Paritätstransformationen - beziehen, darüber hinaus kann es sich aber auch um eine Spiegelung in einem internen Raum handeln. In der Teilchenphysik wäre dies zum Beispiel der Spinorraum oder Spinraum.

In der Teilchenphysik kann der Spin eines Teilchens dazu verwendet werden, eine Händigkeit (bzw. Chiralität) für das Teilchen festzulegen. Ein masseloses Fermion ist links- bzw. rechtshändig, wenn die Projektion seines Spins auf seine Bewegungsrichtung ein positives bzw. negatives Vorzeichen besitzt. Die Richtung des Spins kann hierbei nicht durch eine Lorentztransformation verändert werden, da sich ein masseloses Teilchen immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Formal läßt sich die Projektion des Spins schreiben als

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad , \quad (2.16)$$

die aus einer Wellenfunktion  $\psi$  in entsprechenden link- bzw. rechtshändigen Beiträge herausprojiziert

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad , \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \quad . \quad (2.17)$$

## Chirale Symmetrie von Fermionen

Symmetrien und Symmetrietransformationen spielen in der Physik der letzten 100 Jahre eine wichtige Rolle. Zuerst die Raum-Zeit-Symmetrien der speziellen Relativitätstheorie (1905), später interne Symmetrien wie zum Beispiel die näherungsweise gültige  $SU(2)$  Symmetrie (1930). Den Durchbruch brachte dann die Erkenntnis, daß es mehr Symmetrien gibt als man durch die Beobachtung des Teilchenspektrums erwarten würde. Außerdem gibt es (exakte oder näherungsweise gültige) Symmetrien einer Theorie, die sich nicht in dem physikalischen Grundzustand widerspiegeln. Dieses Verhalten wird als spontane Symmetriebrechung bezeichnet. Im Laufe der Zeit wurden weitere Symmetrien entdeckt, unter ihnen die näherungsweise gültige  $SU_V(2) \times SU_A(2)$ -Symmetrie, die auch als *chirale Symmetrie* bezeichnet wird, welche im Folgenden kurz erläutert werden soll.

Die verschiedenen heute bekannten Symmetrien bilden die Grundlage der heute existierenden fundamentalen Theorien, den Quantenfeldtheorien [14]. Es besteht eine Verbindung zwischen der Invarianz einer Lagrangedichte unter bestimmten kontinuierlichen Symmetrietransformationen und den Erhaltungsgrößen einer Theorie. Formal wird diese Aussage durch das Noether Theorem [15] formuliert. Für die Quantenfeldtheorien folgt mit Hilfe des Noether Theorems eine Vielzahl von Erhaltungsgrößen aus Symmetrien.

Die Dynamik freier Fermionen mit Masse  $m$  ist durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi \quad (2.18)$$

gegeben, woraus mittels der Euler-Lagrange Gleichung die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial} - m)\psi &= 0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

ergeben. Im Rahmen der Dirac-Theorie für masselose freie Fermionen ( $m = 0$ ) gibt es die erhaltenen Viererstromdichten

$$j_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi \quad , \quad (2.20)$$

auch als Vektorstromdichte bezeichnet, und

$$j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \psi \quad , \quad (2.21)$$

die auch als Axialvektorstromdichte bezeichnet wird, dabei sind  $\vec{\tau}$  die Pauli-Matrizen. Die Divergenzen dieser Ströme sind

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_V^\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi + \bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2} \cancel{\partial} \psi \\ &= (im\bar{\psi}) \frac{\vec{\tau}}{2} \psi + \bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2} (-im\psi) = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_A^\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \psi - \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma^\mu \partial_\mu (\psi) \\ &= (im\bar{\psi}) \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \psi - \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} (-im\psi) \\ &= im\bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Damit ist die Axialstromdichte im allgemeinen nicht erhalten. Für  $m = 0$  allerdings ist dieser Strom ebenfalls erhalten.

Das Noether Theorem besagt nun, daß mit einem erhaltenen Strom eine Invarianz der Lagrangedichte unter einer bestimmten Symmetrietransformation einhergeht. Im Falle der Vektorstromdichte (2.20) ist diese Transformation durch

$$\psi \longrightarrow e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}} \psi \cong (1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}) \psi \quad (2.24)$$

gegeben und im Falle der Axialvektorstromdichte durch

$$\psi \longrightarrow e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}\gamma_5} \psi \cong (1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}\gamma_5) \psi \quad (2.25)$$

gegeben. Die Transformation (2.24) ist eine Symmetrie der Lagrangedichte (2.18), die Transformation (2.25) ist jedoch nur eine Symmetrie für den Ableitungsterm der



Lagrangedichte. Die Lagrangedichte ist also nur für den Fall  $m = 0$  symmetrisch unter *beiden* Transformationen. Ist eine Lagrangedichte nun invariant unter den beiden Transformationen (2.24) und (2.25), dann spricht man von der  $SU_V(2) \times SU_A(2)$ -Symmetrie bzw. von der *chiralen Symmetrie*.

Der Grund hierfür liegt in der folgenden Tatsache: Statt der Stromdichten  $j_V$  und  $j_A$  können auch die Stromdichten

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= \frac{1}{2} (j_V^\mu - j_A^\mu) \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi_L \end{aligned} \quad (2.26)$$

und

$$\begin{aligned} j_R^\mu &= \frac{1}{2} (j_V^\mu + j_A^\mu) \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \psi_R \end{aligned} \quad (2.27)$$

definiert werden. Hierbei wurde die Eigenschaft von  $(1 \pm \gamma_5)/2$  als Projektionsoperator verwendet, die links- bzw. rechtshändigen Beiträge aus  $\psi$  herausprojizieren. Beide Ströme sind für sich unter den Transformationen (2.24) und (2.25) erhalten. Hierdurch läßt sich jetzt erkennen, warum die  $SU_V(2) \times SU_A(2)$ -Symmetrie auch als chirale Symmetrie bezeichnet wird: linkshändige Fermionen werden immer in linkshändige transformiert, während rechtshändige immer in rechtshändige transformiert werden.

Im Falle der QCD ist die chirale Symmetrie nur für den Fall  $m = 0$  gegeben. Da allerdings die Masse  $m$  der Quarks sehr klein ist, spricht man von einer näherungsweise gültigen Symmetrie.

## 2.3 Die effektive Feldtheorie von Gell-Mann und Levy

Das lineare  $\sigma$ -Modell [16] ist ein einfaches Modell dessen Lagrangedichte unter chiralen Symmetrietransformationen invariant ist. Es wurde von Gell-Mann und Levy bereits zu einer Zeit eingeführt, zu der die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung noch nicht existierte.

Wie bereits erwähnt wurde, kann die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung bisher nur in einigen Grenzfällen gelöst werden. Daher ist es nötig, effektive

Modelle zu konstruieren, welche die grundlegenden Eigenschaften der QCD widerspiegeln - wie zum Beispiel die chirale Symmetrie. Die relevanten Freiheitsgrade sind im Fall des in dieser Arbeit verwendeten linearen  $\sigma$ -Modells Konstituentenquarks und Mesonen.

Das lineare  $\sigma$ -Modell ist ein vielfach angewendetes Modell, das seit mehreren Jahrzehnten untersucht wird. Es beinhaltet die korrekte phänomenologische Beschreibung der starken Wechselwirkung bei niedrigen Energien - einschließlich der chiralen Symmetrie.

Ursprünglich wurde das lineare  $\sigma$ -Modell dazu verwendet, die Wechselwirkung zwischen Nukleonen zu beschreiben. Allerdings ist es möglich, die in diesem Modell verwendeten Annahmen auf Konstituentenquarks zu übertragen. Die Masse der Nukleonen  $m_N$  wird ersetzt durch die Masse der Konstituentenquarks  $m_q = \frac{1}{3}m_N$ . Im Gegensatz zur QCD beschreibt, das lineare  $\sigma$ -Modell keine Strom- sondern Konstituentenquarks.

Die Lagrangedichte ist von der Form

$$\mathcal{L} = \bar{q} [i\gamma^\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})] q + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) - U(\sigma, \vec{\pi}) \quad , \quad (2.28)$$

und das Potential für die Selbstwechselwirkung des chiralen Feldes  $\phi = (\sigma, \vec{\pi})$  ist gegeben durch

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - h_q \sigma - U_0 \quad . \quad (2.29)$$

$q$  bezeichnet das Konstituentenquarkfeld  $q = (u, d)$ , welches durch den Kopplungsterm  $g\bar{q}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi})q$  an die  $\sigma$ - und  $\vec{\pi}$ -Felder gekoppelt ist.  $g$  ist die Kopplungsstärke an die  $\sigma$ - und  $\vec{\pi}$ -Felder, die zusammen das chirale Feld  $\phi = \phi_a = (\sigma, \vec{\pi})$  bilden. Der Kopplungsterm insgesamt ist invariant unter chiralen Symmetrietransformationen, der  $\vec{\pi}$ -Anteil allein hat diese Eigenschaft nicht. Alle anderen Terme sind ebenfalls invariant unter chiralen Symmetrietransformationen. Außerdem beinhaltet das Potential (2.29) sowohl spontane als auch explizite Brechung der chiralen Symmetrie. Die Parameter für das Potential  $U(\phi)$  der chiralen Felder werden weiter unten festgelegt.

Spontan gebrochene Symmetrien sind Symmetrien, die eigentlich in einer Theorie enthalten sind, sich aber nicht im Grundzustand der Theorie widerspiegeln. Der Grundzustand scheint dann, die Symmetrie zu brechen, in Wirklichkeit aber ist sie lediglich verborgen.

Im Unterschied dazu ist die explizite Symmetriebrechung eine echte Brechung einer Symmetrie. Das heißt, die Theorie selbst ist dann nicht mehr invariant unter

bestimmten Transformationen. Ein Beispiel für eine solche Theorie ist die QCD - die Lagrangedichte enthält einen Term, der die chirale Symmetrie explizit bricht. Durch die endliche (d.h. nichtverschwindende) Masse der Stromquarks ist die Symmetrie der Lagrangedichte explizit - allerdings nur sehr schwach - gebrochen. Die Lagrangedichte der QCD ist dadurch nur näherungsweise invariant unter chiralen Transformationen. Wären die Quarks masselos, wäre die chirale Symmetrie nur spontan gebrochen und damit die Lagrangedichte invariant. Bemerkbar macht sich diese explizit gebrochene Symmetrie zum Beispiel bei der Messung des hadronischen  $\beta$ -Zerfalls.

Mit der Existenz einer explizit gebrochenen Symmetrie ist das Auftreten von *masselosen* Bosonen mit Spin Null verbunden. Diese skalaren Teilchen werden als Nambu-Goldstone-Bosonen oder auch einfach nur als Goldstone-Bosonen bezeichnet. Die Idee für dieses Theorem wurden zuerst von Nambu et al. ([17, 18, 19]) und Goldstone et al. ([20]) entwickelt.

Im Falle der chiralen Symmetrie muß das Goldstoneboson negative Parität, Spin Null, Isospin Eins und keine Baryonenzahl oder Seltsamkeit besitzen. Für die zwei Quarkflavors und die spontane Brechung der chiralen Symmetrie erhält man drei pseudoskalare Goldstone-Bosonen, die mit dem Piontriplett  $\pi^i(x)$  mit  $i = 1, 2, 3$  identifiziert werden. Die Pionen besitzen exakt die für das Goldstoneboson geforderten Quantenzahlen. Allerdings sind Pionen nicht masselos, hierfür ist die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die endliche Quarkmasse verantwortlich. Die formale Verbindung zwischen massiven Goldstone-Bosonen und explizit gebrochenen Symmetrien wird durch die so genannte PCAC-Relation (**P**artial **C**onserved **A**xial **C**urrent) [17, 16] hergestellt. Aus der so genannten Goldberger-Treiman-Relation [21, 22] läßt sich die Vakuummasse der Konstituentenquarks herleiten, welche gegeben ist durch

$$m_q = g f_\pi, \quad (2.30)$$

$f_\pi$  ist die Vakuumzerfallskonstante für das Pion, welche experimentell bestimmt wird zu  $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ .

Um für das lineare  $\sigma$ -Modell die korrekte Konstituentenquarkmasse zu erhalten muß  $g = 3.3$  gewählt werden, die Wechselwirkung  $g\bar{q}(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\pi})q$  hat die Form eines Masseterms - die Quarks erhalten durch die Wechselwirkung mit den chiralen Feldern eine effektive Masse

$$m_q = g |\phi| = g\sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2} \quad . \quad (2.31)$$

Der Erwartungswert für das chirale Feld im Vakuum muß nach der Goldberger-

Treimann-Relation (2.30) bei  $\sigma_0 = f_\pi$  liegen. Dies ist dann der Fall, wenn das Minimum des Potentials für die Selbstwechselwirkung der Felder (2.29)

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - h_q \sigma - U_0$$

bei  $\sigma_0 = f_\pi$  liegt. Der Term  $h_q$  berücksichtigt die explizite Symmetriebrechung, welche zu einer nichtverschwindenden Pionmasse führt, und ist durch

$$h_q = f_\pi m_\pi^2 \quad (2.32)$$

gegeben. Für den Fall  $m_\pi = 0$  verschwindet auch die explizite Symmetriebrechung. Der Parameter

$$v_0^2 = f_\pi^2 - \frac{h_q}{2\lambda f_\pi^2} \quad (2.33)$$

legt das Minimum des Potentials bei  $\sigma_0 = f_\pi$  fest. Dies sieht man direkt für  $m_\pi = 0$ . Mit dieser Wahl der Parameter ergibt sich dann für  $U_0 = U(f_\pi)$  der folgende Zusammenhang

$$U_0 = \frac{m_\pi^4}{4\lambda^2} - f_\pi^2 m_\pi^2 \quad . \quad (2.34)$$

Mit diesem Potentials bietet das lineare  $\sigma$ -Modell eine effektive Beschreibung der spontanen und expliziten Brechung der chiralen Symmetrie.

Nachdem nun in diesem Abschnitt die Grundlagen des linearen  $\sigma$ -Modells diskutiert wurden, sollen im folgenden Abschnitt dessen thermodynamische Eigenschaften diskutiert werden.

## 2.4 Thermodynamik des linearen $\sigma$ -Modells

Innerhalb der Chiralen Hydrodynamik soll ein Wärmebad von Quarks beschrieben werden, welches an die chiralen Felder ankoppelt. Dies ermöglicht es, die Quark- und Antiquarkfreiheitsgrade in der Zustandssumme auszuintegrieren und so daraus das effektives Potential für die chiralen Felder in Anwesenheit dieses Wärmebades zu bestimmen. Im Folgenden wird ein System von Quarks und Antiquarks betrachtet, welches sich im thermischen Gleichgewicht befindet.

Zunächst soll nun die großkanonische Zustandssumme bestimmt werden [23]. Sie ergibt sich aus der Lagrangedichte:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \left[ \int_0^{1/T} d(it) \int_V d^3x \left( \mathcal{L} + \mu \bar{q} \gamma^0 q \right) \right] \quad , \quad (2.35)$$

wobei  $\mathcal{V}$  das Volumen des Systems,  $T$  dessen Temperatur und  $\mu$  das Quarkchemische Potential bezeichnet. In der mittleren Feld Näherung [24] werden die chiralen Felder in der Lagrangedichte durch ihre Erwartungswerte ersetzt. Damit läßt sich (2.35) vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \mathcal{N}_U \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left\{ i \int_0^{1/T} dt \int_{\mathcal{V}} d^3x \bar{q} [i\gamma^\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} + \mu\gamma^0)] q \right\} \\ &= \mathcal{N}_U \det_p \left\{ [p_\mu \gamma^\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} + \mu\gamma^0)]/T \right\} \quad ,\end{aligned}\quad (2.36)$$

wobei

$$\mathcal{N}_U = \exp \left( -\frac{\mathcal{V}U(\sigma, \vec{\pi})}{T} \right) . \quad (2.37)$$

Aus der Zustandssumme ergibt sich das großkanonische Potential durch

$$V_{\text{eff}}(T, \mu) = -\frac{T}{\mathcal{V}} \log \mathcal{Z} = U(\phi) + \tilde{V}_q(T, \mu) . \quad (2.38)$$

Hierbei ist der Beitrag der Quarks und Antiquarks  $\tilde{V}_q(T, \mu)$  gegeben

$$\tilde{V}_q(T, \mu) = -d_q \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \log [1 + e^{\mu - E/T}] + T \log [1 + e^{-\mu - E/T}] \right\} \quad (2.39)$$

gegeben, wobei  $d_q = 12$  der Entartungsfaktor für Farbe, Spin und Isospin ist. Der divergente erste Term in  $\tilde{V}_q$  ist der Beitrag für  $T = 0$ . Er kann in das Potential  $U$  absorbiert werden, indem man die Parameter  $\lambda^2$  und  $v^2$  renormiert. Die dabei auftretende Abhängigkeit von der Normierungsskala wird im folgenden nicht berücksichtigt. Integriert man Gleichung (2.39) partiell und vernachlässigt den divergenten Term (siehe hierzu [25]), so erhält man für das Quarkpotential den folgenden Ausdruck

$$V_q(T, \mu, \phi) = -d_q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} [f(p, T, \mu, \phi) + f(p, T, -\mu, \phi)] . \quad (2.40)$$

Hierbei ist  $f(p, T, \mu, \phi)$  die Verteilungsfunktion für die Quarks und Antiquarks im Impulsraum

$$f(p, T, \mu, \phi) = \frac{1}{1 + \exp((E(p, \phi) - \mu)/T)} . \quad (2.41)$$

Insgesamt ergibt sich damit für das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(T, \mu, \phi)$ :

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(T, \mu, \phi) &= U(\phi) - d_q T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \log(1 + e^{\mu - E/T}) + \log(1 + e^{-\mu - E/T}) \right\} \\ &= U(\phi) - d_q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} [f(p, T, \mu, \phi) + f(p, T, -\mu, \phi)] \\ &= U(\phi) + V_q(T, \mu, \phi) \quad .\end{aligned}\quad (2.42)$$

Die Abhängigkeit des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}(T, \mu, \phi)$  von  $\phi$  entsteht durch die effektive Masse der Quarks

$$m_q = g|\phi| = g\sqrt{\sum_a \phi_a \phi_a}, \quad (2.43)$$

welche in den Ausdruck für die Energie der Quarks

$$E(p, \phi) = \sqrt{p^2 + m_q^2} = \sqrt{p^2 + g^2|\phi|^2} \quad (2.44)$$

eingeht.

Prinzipiell können auch die kurzwelligen Fluktuationen der chiralen Felder  $\phi$  berücksichtigt werden, was zu einem Beitrag zum effektiven Potential (2.42) führt [26, 27, 28]. Jedoch ist die Form von Gleichung (2.42) für die phänomenologischen Untersuchungen dieser Arbeit ausreichend, da der Hauptaugenmerk dieser Arbeit darin liegt, ein qualitatives Verständnis für die Dynamik eines Phasenübergangs in der Nähe des kritischen Punktes zu erhalten. In den nächsten beiden Abschnitten soll die Phasenstruktur des hier verwendeten Modells diskutiert werden. Die Ergebnisse hierfür stimmen qualitativ mit Gittereichtheorie-Rechnungen überein. Damit wird es möglich sein, einen Einblick in die Auswirkungen von Nichtgleichgewichtseffekten auf die Dynamik von Phasenübergängen zu erhalten.

Nachdem die Gleichungen für das effektive Potential aufgestellt wurden, soll nun dessen Form diskutiert werden. Aus dem effektiven Potential wird dann die Zustandsgleichung und das Phasendiagramm bestimmt.

## 2.5 Phasendiagramm für verschiedene Parameter

### Phasendiagramm für $m_q = 307 \text{ MeV}$

Um das Quarkpotential  $\tilde{V}_q$  (2.40) und damit das effektive Potential zu bestimmen, muß über die Quarkimpulse integriert werden. Mit analytischen Mitteln ist dies bei endlichen Quarkmassen nicht möglich und so muß auf eine numerische Integration zurückgegriffen werden. Hierfür bietet sich die Integrationsroutine `gauss32` der Numerical Recipes [29] an, mit deren Hilfe sich Integrale der Form, wie sie in (2.40) auftreten, ohne Probleme und in guter Genauigkeit berechnen lassen.

Für den Wert der Kopplungskonstanten  $g = 3.3$  ergibt sich aus dem linearen  $\sigma$ -Modell eine Konstituentenquarkmasse von  $m_q = 312 \text{ MeV}$  und damit eine korrekte Nukleonmasse. Damit ergibt sich das in Abbildung 2.1 dargestellte Phasendiagramm. Auf den Achsen sind Temperatur  $T$  und Quarkchemisches Potential

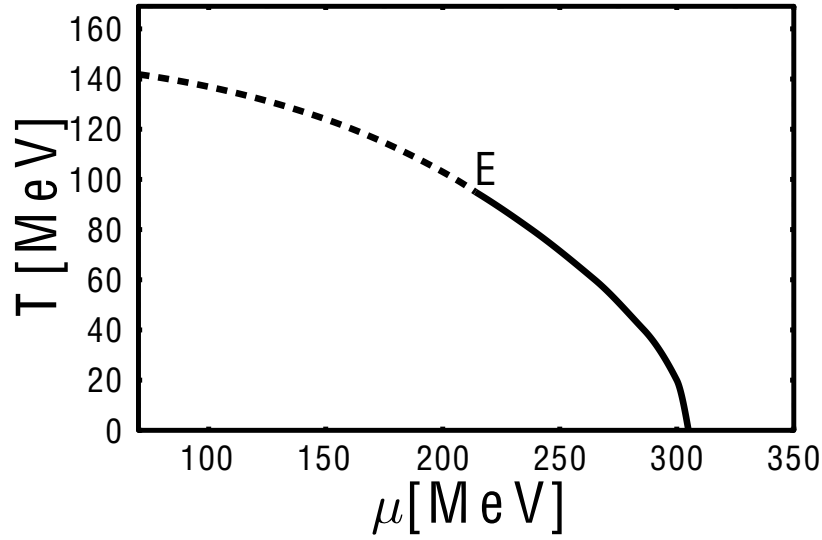


Abbildung 2.1: Phasendiagramm des linearen  $\sigma$ -Modells in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  und dem Quarkchemischen Potential  $\mu$ .

$\mu$  aufgetragen, die durchgezogene Linie kennzeichnet einen Phasenübergang erster Ordnung. Für kleinere  $\mu$  geht der Phasenübergang erster Ordnung am kritischen Endpunkt bei  $T_E$  und  $\mu_E$  in einen Crossover über (gestrichelte Linie).

### Crossover

Um das Phasendiagramm zu erstellen, muß zunächst das effektive Potential (2.42) bei verschiedenen  $T$  und  $\mu$  bestimmt werden. Abbildung 2.2(a) zeigt  $V_{\text{eff}}$  für  $\mu = 0$  bei verschiedenen Temperaturen ober- und unterhalb der Übergangstemperatur. Für hohe Temperaturen (rote Linie) zeigt das Potential ein Minimum bei kleinen Werten für das  $\sigma$ -Feld, die Quarks sind also nahezu masselos (für das Pion Feld wird  $\vec{\pi} = 0$  gewählt, d.h. dessen Vakuum Erwartungswert). Das System befindet sich also in der chiral restaurierten Phase. Bei der Lage des Minimums zeigt sich hier der Einfluß der expliziten Symmetriebrechung durch den Term  $h_q \sigma$  im Potential für die Felder  $U(\phi)$ . Ohne diesen Term wäre die Lage des Minimums von  $V_{\text{eff}}$  bei  $\sigma_0 = 0$  und die Quarks somit vollkommen masselos. Bei geringeren Temperaturen (blaue Linie) zeigt das Potential ein Minimum bei  $\sigma_0 = f_\pi$ , dem Vakuum Erwartungswert für das chirale Feld. Damit befindet sich das System also in der chiral gebrochenen Phase und die Quarks besitzen ihre Vakuummasse von 307 MeV. Für Temperaturen die im Bereich des Übergangs von chiral gebrochener zu chiral restaurierter Phase liegen (violette Linie), verschiebt sich das Minimum des Potentials bei sinkender

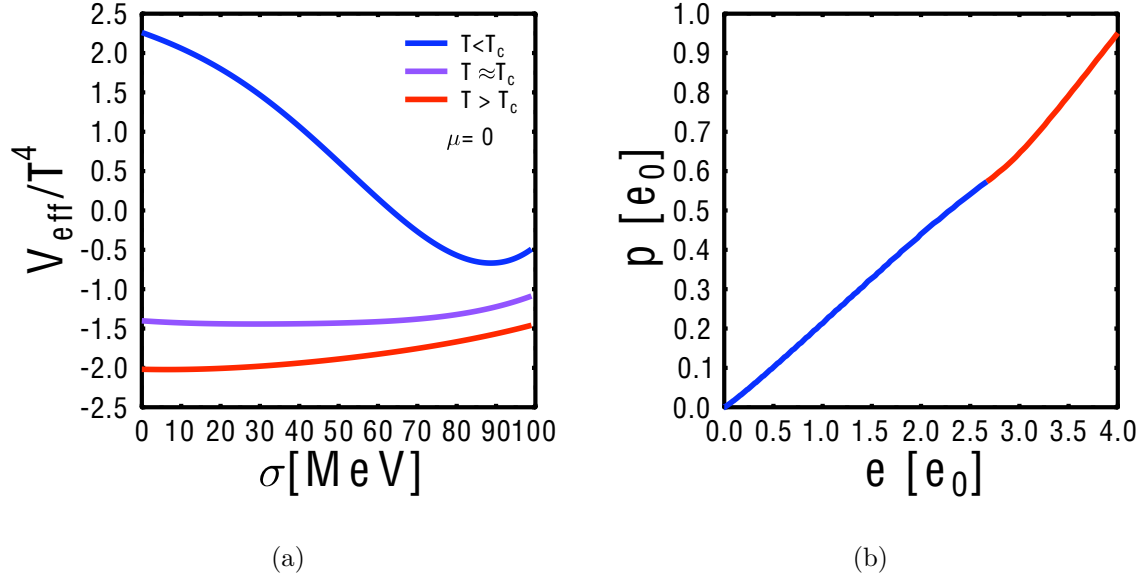


Abbildung 2.2: Effektives Potential für ausgewählte Werte von  $T$  (a) und Zustandsgleichung  $p(e)$  (b) für  $g = 3.3$  und  $\mu = 0$

Temperatur kontinuierlich von  $\sigma_0 \approx 0$  zu  $\sigma_0 = f_\pi$ . Ein solcher kontinuierlicher Übergang wird auch als *Crossover* bezeichnet.

Um nun die zugehörige Zustandsgleichung für den Fall des thermischen Gleichgewichtes zu bestimmen, muß das Minimum von  $V_{\text{eff}}(\phi)$  bestimmt werden. Dies entspricht der Minimierung des effektiven Potentials, also

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(\phi)}{\partial \phi} \right|_{T=\text{const}} = 0 \wedge \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{T=\text{const}} > 0 \quad (2.45)$$

Das effektive Potential hängt mit dem Druck über

$$p = -V_{\text{eff}} \quad (2.46)$$

zusammen. Daraus läßt sich der dazugehörige Druck  $p$  und die Energiedichte  $e$  im Gleichgewicht bestimmen. Abbildung 2.2(b) zeigt den so bestimmten Druck  $p(e, \mu = 0)$  für den Gleichgewichtsfall als Funktion der Energiedichte. Man erkennt deutlich die kontinuierliche Änderung der Steigung  $\partial p / \partial e$  bei  $e \approx 3e_0$ . Für kleine Energiedichten  $e$  befindet sich das System in der chiral gebrochenen Phase, während sich das System für größere Energiedichten  $e$  in der chiral restaurierten Phase befindet. Hier sind die Quarks nahezu masselos, und damit ergibt sich die Zustandsgleichung eines idealen Gases mit  $p \approx e/3$ .



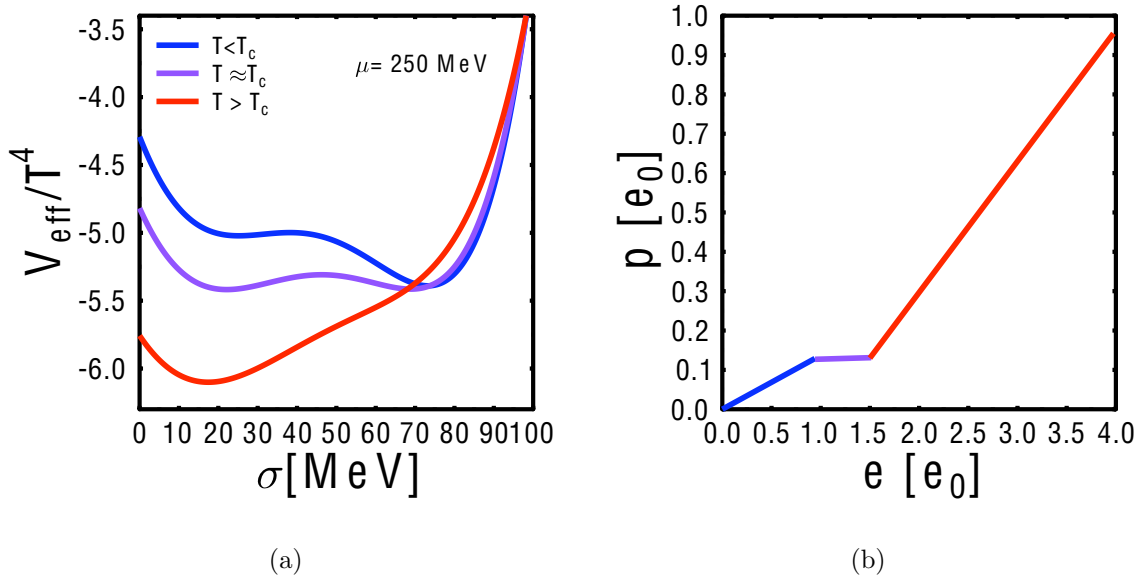


Abbildung 2.3: Effektives Potential für ausgewählte Werte von  $T$  (a) und Zustandsgleichung  $p(e)$  (b) für  $g = 3.3$  und  $\mu_q = 250$  MeV

### Phasenübergang 1. Ordnung

Die Zustandsgleichung für  $\mu > \mu_E$  hingegen zeigt ein deutlich anderes Verhalten. Abbildung 2.3(a) zeigt für diesen Fall das effektive Potential bei verschiedenen Temperaturen ober- und unterhalb der Übergangstemperatur.

Für hohe Temperaturen (rote Linie) deutlich über der Phasenübergangstemperatur  $T_C$  zeigt das Potential ein Minimum bei kleinen Werten für  $\sigma$  (für das  $\vec{\pi}$ -Feld wird wieder  $\vec{\pi} = 0$  gewählt), das System befindet sich also ebenfalls in der chiral restaurierten Phase. Verringert man die Temperatur, so entsteht bei der so genannten spinodalen Temperatur  $T = T_{\text{sp}}^+$  zunächst ein Wendepunkt und bei  $T < T_{\text{sp}}^+$  ein zweites Minimum. Diese Minimum stellt jedoch einen instabilen Zustand des Systems dar. Im Gleichgewicht wird sich das System immer in dem Minimum mit der geringsten freien Energie befinden, d.h.  $V_{\text{eff}}$  minimieren und damit den Druck maximieren.

Wird die Temperatur im System weiter verringert, verschieben sich die beiden Minima, so daß für eine bestimmte Temperatur beide Minima den gleichen Wert für  $V_{\text{eff}}$  besitzen (violette Linie). An diesem Punkt wird die so genannte Gibbs-Konstruktion für den Phasenübergang verwendet. Berücksichtigt man nun, daß effektives Potential und Druck miteinander in Verbindung stehen ( $p = -V_{\text{eff}}$ ), folgt

daraus, daß beide Minima den gleichen Druck bei gleicher Temperatur  $T$  und quarkchemischen Potential  $\mu_q$  besitzen aber eine unterschiedliche Energiedichte  $e$ . Am Punkt des Phasenübergangs besitzen beide Minima damit den gleichen Druck, und man spricht von Phasenkoexistenz. Im Gleichgewicht spricht man nun von einer gemischten Phase, die beiden Minima unterscheiden sich lediglich durch die latente Energie. Bei einer weiteren Verringerung der Temperatur verschiebt sich das Minimum bei größeren Werten von  $\sigma$  nach unten, und somit befindet sich das System für den Gleichgewichtsfall nun in der chiral gebrochenen Phase. Das Minimum bei kleinen Werten von  $\sigma$  stellt jetzt einen instabilen Zustand des Systems dar. Es verschwindet mit sinkender Temperatur schließlich an einem zweiten Spinodalen Punkt  $T_{sp}^-$ . Für  $T < T_{sp}^-$  besitzt das effektive Potential nur noch ein Minimum.

Abbildung 2.3(b) zeigt den Druck  $p(e)$  als Funktion der Energiedichte. Man erkennt deutlich den Phasenübergang erster Ordnung und die damit verbundene latente Energie. Für die Schallgeschwindigkeit ergibt sich im Bereich des Phasenübergangs  $c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_{s/\rho=const} \approx 0$ . Für kleine Energiedichten  $e$  befindet sich das System in der chiral gebrochenen Phase, während sich für größere  $e$  das System in der chiral restaurierten Phase befindet.

Befindet sich ein System *nicht* in dem Minimum des effektiven Potentials mit dem größten Druck, so spricht man von Überhitzung bzw. Unterkühlung. Durch eine dynamische Beschreibung des chiralen Phasenübergangs kann nun die Dynamik von Quarks und chiralen Feldern in diesem effektiven Potential beschrieben werden. Und so können mit der chiralen Hydrodynamik Phasenübergänge im Nichtgleichgewicht beschrieben werden. Die Zustandsgleichung für endliche Baryondichten wird in Kapitel 5 Verwendung finden. Hier sollen Inhomogenitäten in der Energie- und Baryondichte untersucht werden.

## Zustandsgleichung für verschiedene Kopplungskonstanten $g$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das Phasendiagramm für eine physikalische Quarkmasse von  $m_q = 307$  MeV diskutiert mit dessen Hilfe sich ein System, welches sich - innerhalb der durch die Bewegungsgleichungen und Zustandsgleichung gegebenen Grenzen - frei im Phasendiagramm entwickeln kann, untersuchen läßt. In diesem Fall können prinzipiell Teile des Systems durch unterschiedliche Punkte in der Phasengrenze gehen, was zu einer Überlagerung verschieden starker Übergänge führt.

Um nun aber ein erstes Verständnis über den Einfluß der dynamischen Beschrei-

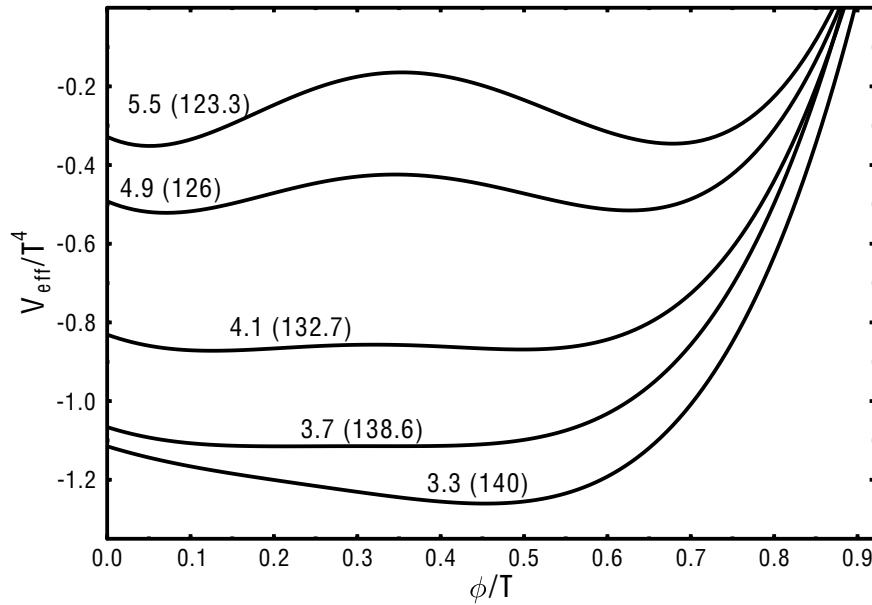
bung von Phasenübergängen zu erhalten, ist es von Vorteil, einen Phasenübergang oder Crossover einer bestimmten Stärke vorzugeben zu können, und dann zu untersuchen, wie sich ein System mit gegebener Anfangsbedingung unter diesen Voraussetzungen entwickelt. Dies wird möglich, wenn man keine physikalischen Quarkmassen mehr fordert und somit nicht mehr auf die Kopplungskonstante von  $g = 3.3$  festgelegt ist. Zwar ist eine unphysikalische Quarkmasse im allgemeinen nicht sinnvoll, aber bei den Untersuchungen in dieser Arbeit soll es zunächst um ein qualitatives Verständnis der Auswirkungen von Übergängen im Nichtgleichgewicht gehen.

Damit man die Art des Übergangs von chiral gebrochener zu chiral restaurierter Phase festlegen kann, muß zunächst die Einschränkung gemacht werden, daß die Baryonendichte verschwindet ( $\mu = 0$ ), da sonst die Entwicklung des Systems wieder im ganzen Phasendiagramm erfolgen könnte. Für einen Wert von  $g = 3.3$  erhält man dann einen Crossover. Für höhere Werte von  $g$  wird der Crossover stärker und geht am kritischen Punkt bei  $g = 3.7$  in einen Phasenübergang erster Ordnung über.

Abbildung 2.4 zeigt das effektive Potential als Funktion des  $\sigma$ -Feldes für verschiedene Kopplungskonstanten  $g$  und die zugehörigen Übergangstemperaturen. Für  $g = 5.5$  erkennt man zwei deutlich ausgeprägte Minima mit gleichem Wert für das effektive Potential. Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, erhält man für eine solche Form des effektiven Potentials im Gleichgewicht einen Phasenübergang erster Ordnung. Reduziert man nun die Stärke der Kopplung, so wird das Maximum, welches die beiden Minima voneinander trennt, kleiner und der Phasenübergang damit schwächer. Außerdem sinkt die Temperatur, bei der der Phasenübergang erfolgt. Verringert man die Kopplungskonstante weiterhin, so verschwindet am kritischen Punkt ( $g = 3.7$ ) das Maximum und das Potential besitzt nur noch ein Minimum, welches eine sehr geringe Krümmung aufweist. Für noch kleinere Kopplungskonstanten verschiebt sich das Minimum und erhält eine stärkere Krümmung. Dies entspricht einem Crossover, wie er zum Beispiel bei  $g = 3.3$  auftritt. Die prinzipielle Form (und auch die Krümmung des Potentials) wirkt sich auf die Dynamik des Systems, was in den Ergebniskapiteln (Kapitel 3 bis 5) diskutiert wird.

Mit der Wahl einer geeigneten Kopplungskonstanten  $g$  läßt sich also ein Übergang zwischen den Phasen von gewünschter Stärke und Art erhalten und deren Einfluß untersuchen. Dabei bietet es sich an, drei Fälle untersuchen: den Phasenübergang erster Ordnung bei  $g = 5.5$ , den kritischen Punkt bei  $g = 3.7$  und den Crossover bei  $g = 3.3$ .

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Zustandsgleichungen sollen zum einen in



Abbildungung 2.4: Effektive Potential als Funktion des  $\phi$ -Feldes bei  $\vec{\pi} = 0$  und variierender Kopplungskonstante  $g$ . Die Zahlen vor den Klammern bezeichnen die Stärke der Kopplungskonstanten, die Zahlen in den Klammern geben die Übergangstemperaturen in MeV an.

Kapitel 3 verwendet werden, um einen ersten Eindruck der qualitativen Auswirkungen des dynamischen Phasenübergangs zu erhalten und um kollektive Observablen zu untersuchen. In Kapitel 4 wird die zeitliche Entwicklung der Korrelationslänge der chiralen Felder in der Nähe des kritischen Punktes ( $g = 3.7$ ) untersucht.

## 2.6 Gekoppelte Dynamik von Feldern und Flüssigkeit (Chirale Hydrodynamik)

In den vorangegangenen Abschnitten sind die relativistische Hydrodynamik, das lineare  $\sigma$ -Modell und seine Thermodynamik diskutiert worden. Jetzt sollen beide Beschreibungen miteinander verbunden werden.

Die Bewegungsgleichungen für die chiralen Felder können aus der Lagrangedichte (2.28) des linearen  $\sigma$ -Modells unter Berücksichtigung der Mittleren-Feld-Näherung [24] hergeleitet werden [30]

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + \frac{\delta U}{\delta \sigma} = -g \langle \bar{q}q \rangle \quad ,$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{\delta U}{\delta \vec{\pi}} = -g \langle \bar{q} \gamma_5 \vec{\tau} q \rangle , \quad (2.47)$$

wobei die Terme  $\langle \bar{q} q \rangle$  und  $\langle \bar{q} \gamma_5 \vec{\tau} q \rangle$  durch das Wärmebad aus Quarks gegeben sind. Um die explizite Form für diese beiden Terme zu erhalten, geht man von der Lagrangedichte in der Mittleren-Feld-Näherung aus. Die Energiedichte der Quarks ist dann gegeben durch

$$\langle \mathcal{H}_q \rangle = \langle \bar{q} i \not{\partial} q \rangle + g \langle \bar{q} \sigma q \rangle + g \langle \bar{q} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} q \rangle . \quad (2.48)$$

Durch Variation des effektiven Potentials bzw. der Energiedichte der Quarks

$$\begin{aligned} g \langle \bar{q} q \rangle &= \frac{\delta \langle \mathcal{H}_q \rangle}{\delta \sigma} = \frac{\delta \langle V_{\text{eff}} - U \rangle}{\delta \sigma} , \\ g \langle \bar{q} \gamma_5 \vec{\tau} q \rangle &= \frac{\delta \langle \mathcal{H}_q \rangle}{\delta \vec{\pi}} = \frac{\delta \langle V_{\text{eff}} - U \rangle}{\delta \vec{\pi}} , \end{aligned} \quad (2.49)$$

ergibt sich der Beitrag der Quarks bei endlichen Temperaturen zu den Bewegungsgleichungen der chiralen Felder. Damit lassen sich die Gleichungen (2.47) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \sigma + \frac{\delta U}{\delta \sigma} &= -g \rho_s , \\ \partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{\delta U}{\delta \vec{\pi}} &= -g \vec{\rho}_{ps} , \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho_s &= \langle \bar{q} q \rangle = g \sigma d_q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \{ f(p, T, \mu, \phi) + f(p, T, -\mu, \phi) \} , \\ \vec{\rho}_{ps} &= \langle \bar{q} \gamma_5 \vec{\tau} q \rangle = g \vec{\pi} d_q \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} \{ f(p, T, \mu, \phi) + f(p, T, -\mu, \phi) \} \end{aligned} \quad (2.51)$$

die skalare und pseudoskalare Dichte sind, die durch das Wärmebad aus Quarks und Antiquarks erzeugt werden.

Wie bereits weiter oben erwähnt, wird angenommen, daß die Quarks und Antiquarks ein Wärmebad im lokalen thermischen Gleichgewicht bilden. Daher kann ihre zeitliche Entwicklung durch relativistische ideale Hydrodynamik, wie sie in Abschnitt 2.1 diskutiert wurde, und der Energie-Impuls-Tensor somit die Form

$$T^{\mu\nu} = (e + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} . \quad (2.52)$$

hat. Die Energiedichte und der Druck sind dabei durch

$$\begin{aligned} e(\phi, T, \mu) &= \langle \mathcal{H}_q \rangle , \\ p(\phi, T, \mu) &= -V_{\text{eff}}(\phi, T, \mu) + U(\phi_a) . \end{aligned} \quad (2.53)$$

gegeben, die nun von  $T$ ,  $\mu$  und vom Ordnungsparameter  $\phi = \sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}$  abhängig sind.

Durch die Wechselwirkung von Feldern und Flüssigkeit ist der Energie-Impuls-Tensor für die Quarkflüssigkeit allein nicht mehr erhalten. Es ergibt sich für die Erhaltung von Energie und Impuls nun der Zusammenhang

$$\partial_\mu T_{q+\phi}^{\mu\nu} = \partial_\mu (T_q^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}) = 0 \quad , \quad (2.54)$$

das heißt, die Gesamtenergie (und Gesamtimpuls) von Feld ( $T_\phi$ ) und Flüssigkeit ( $T_q$ ) ist erhalten.

Der Energie-Impuls-Tensor für die chiralen Felder läßt sich hierbei direkt aus der Lagrangedichte (2.28) berechnen. Der Beitrag durch die Wechselwirkung der Quarks mit den chiralen Feldern wird bereits durch die effektive Masse der Quarks  $m_q = g|\phi|$  berücksichtigt. Daher muß allein der Beitrag durch die chiralen Felder selbst und deren Selbstwechselwirkung berücksichtigt werden

$$\mathcal{L}_\phi = \sum_a \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_a) (\partial^\mu \phi_a) - U(\phi_a) \quad . \quad (2.55)$$

Daraus ergibt sich der Energie-Impuls-Tensor  $T_\phi^{\mu\nu}$  für die chiralen Felder zu

$$\begin{aligned} T_\phi^{\mu\nu} &= \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial^\nu \phi_a - g^{\mu\nu} \langle \mathcal{L}_\phi \rangle \\ &= \partial^\mu \phi_a \partial^\nu \phi_a + g^{\mu\nu} U(\phi_a) \quad . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Seine Viererdivergenz läßt sich mit Hilfe der Bewegungsgleichung (2.50) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} &= \sum_a \left\{ \partial_\mu \partial^\mu \phi_a + \frac{\delta U}{\delta \phi_a} \right\} \partial^\nu \phi_a \\ &= - \{ g \rho_s \partial^\nu \sigma + g \vec{\rho}_{ps} \cdot \partial^\nu \vec{\pi} \} \quad . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Würde man nicht auf die effektive Beschreibung der Quarks mit Hilfe der Hydrodynamik zurückgreifen, müßte die Dirac-Gleichung für die Quark- und Antiquarkfelder zusammen mit den Bewegungsgleichungen für die chiralen Felder gelöst werden. Diese Herangehensweise ist jedoch sehr schwierig zu realisieren. Daher wird die hier beschriebene Näherung verwendet, in der die Quarks ein Wärmebad für die chiralen Felder bilden, und die Mittlere-Feld-Näherung für die chiralen Felder verwendet.

Die Bewegungsgleichungen für die Felder müssen, ebenso wie die für die Quarks, numerisch gelöst werden. Hierfür wird ein so genannter *leap-frog* Algorithmus verwendet [29]. Die nichtlinearen Gleichungen (2.50) werden in Zeitrichtung in zwei

gekoppelte Gleichungen erster Ordnung aufgespalten, eine für das Feld  $\phi_a$  und eine für das dazu kanonisch konjugierte Feld  $d\phi_a/dt$ . Um diesen Algorithmus verwenden zu können, muß der Zeitabstand für die Propagation der Felder kürzer sein als der für die Quarkflüssigkeit. Nachdem verschiedene Werte für die Größe des Zeitschrittes getestet wurden, ergab sich eine ausreichend gute Genauigkeit für den Wert  $\Delta t = 0.1\Delta x$ . Da die Zeitschritte für die Flüssigkeit viermal größer ist, werden die Felder über vier Zeitschritte hinweg propagiert, währenddessen werden die Flüssigkeitsfelder festgehalten. Für die Propagation im Ortsraum wurde ein Gitterabstand von  $\Delta x = 0.2$  fm, wie auch für die Flüssigkeit, verwendet.

## 2.7 Thermische Fluktuationen des Ordnungsparameterfeldes

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, ist das Ziel der durchgeführten Simulationen, dynamische Fluktuationen des chiralen Ordnungsparameters - bzw. Effekte, die durch diese Fluktuationen verursacht werden beim Übergang zur chiral gebrochenen Phase zu studieren. Daher müssen anfängliche Fluktuationen vorgegeben werden. Allerdings leisten solche anfänglichen Fluktuationen (zur Anfangszeit  $t = 0$  fm) einen Beitrag zum effektiven Potential  $V_{\text{eff}}$ , was zu seiner Verformung führt. Um nun die ursprüngliche Wahl des effektiven Potentials (2.42) wiederherzustellen und damit für die richtige Dynamik der chiralen Felder zu sorgen, müssen passende Korrekturen für alle thermodynamischen Funktionen berücksichtigt werden.

Dabei wird wie folgt vorgegangen: Das chirale Feld wird in seine kurz- und langwelligen Moden aufgeteilt

$$\phi(x) = \langle \phi_a \rangle + \delta\phi_a(x) , \quad (2.58)$$

wobei  $\langle \cdot \rangle$  für die Mittelung über ein ausreichend großes Volumen steht, welches so groß ist, so daß sich die Fluktuationen herausmitteln:

$$\langle \delta\phi \rangle = 0 . \quad (2.59)$$

Betrachtet man nun eine Funktion  $f = f(\phi(x))$ , die in beliebiger Weise von  $\phi$  abhängt, setzt die Aufspaltung nach (2.58) ein und entwickelt bis zur zweiten Ordnung, erhält man:

$$\begin{aligned} f(\phi(x)) &= f(\langle \phi \rangle + \delta\phi(x)) \\ &= f(\langle \phi \rangle) + \sum_a \delta\phi_a(x) \frac{\partial f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{a,b} \delta\phi_a(x) \delta\phi_b(x) \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle \partial \langle \phi_b \rangle} + \mathcal{O}(\delta\phi^3) \quad . \quad (2.60)$$

Mittelt man anschließend über ein ausreichend großes Volumen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle f(\phi(x)) \rangle &= \langle f(\langle \phi \rangle + \delta\phi(x)) \rangle \\ &= f(\langle \phi \rangle) + \sum_a \delta\phi_a(x) \frac{\partial f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \langle \delta\phi_a(x) \delta\phi_b(x) \rangle \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle \partial \langle \phi_b \rangle} + \mathcal{O}(\delta\phi^3) \quad . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nutzt man nun den Umstand aus, daß die Fluktuationen (3.7) für die verschiedenen Komponenten des chiralen Feldes unabhängig sind, also  $\langle \delta\phi_a \delta\phi_b \rangle = \delta_{ab}$ , und außerdem  $\langle \delta\phi_a \rangle = 0$ , so läßt sich die Gleichung weiter vereinfachen zu

$$\langle f(\phi(x)) \rangle = f(\langle \phi \rangle) + \frac{1}{2} \sum_a \langle \delta\phi_a^2 \rangle \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle^2} + \mathcal{O}(\delta\phi^4) \quad . \quad (2.62)$$

Hierbei ist  $\langle \delta\phi^2 \rangle \equiv \sum_a \langle \delta\phi_a \delta\phi_a \rangle$  die Varianz der Fluktuationen der Anfangsbedingung, d.h. zur Anfangszeit  $t = 0$ , summiert über alle internen Quantenzahlen. Der zweite Term beschreibt die zusätzlichen Beiträge der Fluktuationen zu den langwelligen Moden  $\langle \phi_a \rangle$ . Um das ursprüngliche effektive Potential wieder herzustellen muß dieser Term abgezogen werden. Das heißt, die Observable  $\tilde{f}(\phi(x))$  wird folgendermaßen definiert

$$\tilde{f}(\phi(x)) = f(\phi(x)) - \frac{1}{2} \sum_a \langle \delta\phi_a^2 \rangle \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \langle \phi_a \rangle^2} \quad , \quad (2.63)$$

wobei die Terme höherer Ordnung vernachlässigt wurden. Das bedeutet, daß im Folgenden keine Anfangsbedingungen möglich sind, in denen die Fluktuationen um das mittlere Feld sehr groß sind. Und damit wird dann bei der Mittelung über ein ausreichend großes Volumen

$$\langle \tilde{f}(\phi(x)) \rangle = f(\langle \phi(x) \rangle) \quad . \quad (2.64)$$

Der beschriebene Einfluß der anfänglichen Fluktuationen muß nun für alle Größen, die von den chiralen Feldern  $\phi_a$  abhängen, berücksichtigt werden. Für die skalare und pseudoskalare Dichte sowie den Druck ergeben sich die folgenden Modifikationen

$$\rho_s(\phi, T) = g\sigma d_q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} f(k)$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} g \sigma d_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_a \langle \delta \phi_a^2 \rangle \left[ -\frac{g^2 f(k)}{E^2 T} \left( \frac{T}{E} + f(k) e^{E/T} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{g^4 \phi_a^2}{E^3 T^2} f(k) (2f^2(k) e^{2E/T} - f(k) e^{E/T} + 3 \frac{T}{E} f(k) e^{E/T} + 3 \frac{T^2}{E^2}) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 \langle \delta \sigma^2 \rangle \frac{g^2 f(k)}{E^2 T} \left( \frac{T}{E} + f(k) e^{E/T} \right) \right\} , \tag{2.65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_{\text{ps}}(\phi, T) &= g \vec{\pi} d_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} f(k) \\
& - \frac{1}{2} g \vec{\pi} d_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_a \langle \delta \phi_a^2 \rangle \left[ -\frac{g^2 f(k)}{E^2 T} \left( \frac{T}{E} + f(k) e^{E/T} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{g^4 \phi_a^2}{E^3 T^2} f(k) (2f^2(k) e^{2E/T} - f(k) e^{E/T} + 3 \frac{T}{E} f(k) e^{E/T} + 3 \frac{T^2}{E^2}) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 \langle \delta \vec{\pi}^2 \rangle \frac{g^2 f(k)}{E^2 T} \left( \frac{T}{E} + f(k) e^{E/T} \right) \right\} , \tag{2.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\phi, T) &= d_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \log(1 + e^{-E/T}) \\
& - \frac{1}{2} \sum_a \langle \delta \phi_a^2 \rangle \left\{ -\frac{g^2 f(k)}{E} + \frac{g^4 \phi_a^2}{E^3 T} f(k) [T + E - E f(k)] \right\} . \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Es kann gezeigt werden, daß die Identitäten  $g\rho_s = -\delta p/\delta\sigma$  und  $g\rho_{\text{ps}} = -\delta p/\delta\vec{\pi}$  weiterhin gelten. Die Energiedichte der Quarks ergibt sich bei gegebener Temperatur aus dem Druck durch

$$e(\phi, T) = T \frac{\partial p(\phi, T)}{\partial T} - p(\phi, T) . \tag{2.68}$$

Unter Verwendung der modifizierten Gleichung für den Druck (2.67) ist die modifizierte Energiedichte der Quarks durch

$$\begin{aligned}
e(\phi, T) &= d_q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E f(k) - \frac{1}{2} \sum_a \langle \delta \phi_a^2 \rangle \left\{ \frac{g^2 f(k)}{ET} [T - E f(k) e^{E/T}] \right. \\
& \quad \left. - \frac{g^4 \phi_a^2}{E^3 T} f(k) [T + E - E f(k)] + \frac{g^4 \phi_a^2}{ET^2} f^2(k) e^{E/T} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \right\} \tag{2.69}
\end{aligned}$$

gegeben. Für das Selbstwechselwirkungspotential der chiralen Felder ergibt sich die folgende Modifikation

$$\begin{aligned}
U(\phi_a) &= \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - h_q \sigma - U_0 \\
& - \frac{1}{2} \sum_a \langle \delta \phi_a^2 \rangle \lambda^2 (2\phi_a^2 + \sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2) . \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Die obigen veränderten Ausdrücke für  $\rho_s$ ,  $\vec{\rho}_{ps}$ ,  $e$ ,  $p$  und  $U(\phi_a)$  müssen in den Bewegungsgleichungen für die chiralen Felder (2.50), im Energie-Impuls-Tensor der Quarks (2.52) und im Energie-Impuls-Tensor der chiralen Felder (2.56) berücksichtigt werden.

## Numerische Aspekte

Die in den obigen Gleichungen (2.65)-(2.67) und (2.69) auftretenden Integrale lassen sich für endliche Massen nicht exakt berechnen. Mit Hilfe der Routine `gauss32` aus den Numerical Recipes [29] ist es jedoch kein Problem, die Integrale in ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Allerdings müssen diese Integrale pro Zeitschritt und Gitterpunkt mehrfach gelöst werden, zum einen in den Bewegungs-/Erhaltungsgleichungen und zum anderen beim Finden des lokalen Ruhesystems mit Hilfe von Gleichung (2.6) bei der hydrodynamischen Propagation. Daher ist es nicht sinnvoll, die Integrale immer wieder neu zu berechnen.

Aus diesem Grund werden alle Größen, für die ein solches Integral berechnet werden muß, vor der eigentlichen numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen in einer Tabelle berechnet. Bei der Berechnung der numerischen Lösung wird dann der benötigte Wert einer Größe, bei gegebenem  $T$ ,  $\mu$  und  $\phi$  aus der Tabelle bestimmt. Um hierbei eine ausreichend hohe Genauigkeit zu erhalten, werden die Werte jeweils zwischen den gesuchten Werten von  $T$ ,  $\mu$  und  $\phi$  an der nächsten Stützstellen interpoliert.

## 2.8 Zusammenfassung des Modells und Problemstellungen

Zum Abschluß dieses Kapitels soll nun noch einmal kurz das hier verwendete Modell zusammengefaßt werden und ein kurzer Ausblick auf die in den nächsten Kapiteln folgenden Untersuchungen und Ergebnisse gegeben werden.

Mit Hilfe der Chiralen Hydrodynamik ist es nun möglich, den Übergang von der chiral restaurierten (kleine Quarkmassen) zur chiral gebrochenen Phase (große Quarkmassen) im Nichtgleichgewicht zu untersuchen. Die chiralen Felder - welche als ein so genannter *Ordnungsparameter* fungieren - werden dabei durch die Bewegungsgleichungen des linearen  $\sigma$ -Modells beschrieben. Durch die Kopplung der chiralen Felder an die Quarks erhalten diese eine dynamische Masse. Die Quarks wiederum generieren ihrerseits einen Beitrag zum effektiven Potential für die chiralen Felder.

Die Quarks sind dabei immer im thermischen Gleichgewicht, eine Einschränkung die für die chiralen Felder nicht gilt. Damit wird die Nichtgleichgewichtsbeschreibung der Übergänge zwischen den beiden Phasen möglich, und die chiralen Felder agieren als Ordnungsparameter für den Übergang. Die Stärke der Übergänge - Crossover, kritischer Punkt oder Phasenübergang erster Ordnung - kann dabei durch die Veränderung der Kopplungskonstanten  $g$  erfolgen, oder durch die Einführung eines Quarkchemischen Potentials.

Bei den Untersuchungen, die mit Hilfe der Chiralen Hydrodynamik durchgeführt werden sollen, wird, wie bereits erwähnt, der Schwerpunkt auf dem Verständnis von qualitativen Auswirkungen der hier vorgestellten Beschreibung liegen. Die Fragestellung wird also immer lauten: Wie verändert sich die Dynamik eines Systems durch die Verwendung einer Nichtgleichgewichtsbeschreibung, wie sie die Chirale Hydrodynamik liefert.

Die Nichtgleichgewichtsbeschreibung ermöglicht es dem chiralen Feld, sich frei im effektiven Potential zu bewegen. Mit der Einbeziehung von thermischen Fluktuationen in den Anfangsbedingungen werden Effekte wie Blasenbildung berücksichtigt. Würden die thermischen Fluktuationen nicht berücksichtigt, könnte ein System alleine durch eine Verringerung der Temperatur (zum Beispiel durch die hydrodynamische Expansion) in die kühlere Phase übergehen. Durch die Berücksichtigung der thermischen Fluktuationen können heißere Teile des Systems in die chiral gebrochene Phase, aber auch kühlere Teile in die chiral restaurierte Phase übergehen. Zieht man wieder den Vergleich mit Wasser heran, so könnte man dies mit der Möglichkeit der Bildung von Dampfblasen vergleichen. Der Fall des Supercooling (also das Gegenstück zum Siedeverzug) hingegen entspräche dem Fall, daß das System sehr kleine thermische Fluktuationen besitzt. Dann würde sich das System im Falle des Phasenübergangs erster Ordnung zunächst im wesentlichen in dem stabilen Minimum der chiral restaurierten Phase befinden. Durch die Abkühlung des Systems würde sich das effektive Potential verändern und das zuvor stabile Minimum wird unterhalb der Temperatur des Phasenübergangs zu einem metastabilen Minimum. In diesem Minimum wird das System bis zum spinodalen Punkt, an dem das Minimum schließlich verschwindet, gefangen sein. Ist dieser Punkt erreicht, kann das System schlagartig in das stabile Minimum der chiral gebrochenen Phase fallen und der Phasenübergang erfolgt sehr plötzlich.

In Kapitel 3 wird zunächst betrachtet, wie sich diese Nichtgleichgewichtsbeschreibung auf die zeitliche Entwicklung der Energiedichte und der Quarkmasse auswirkt. Durch die spezielle Wahl der Anfangsbedingungen für die Energiedichte und kollekti-

ve Geschwindigkeit der Quarks wird es außerdem möglich sein, erste Untersuchungen durchzuführen, und der Frage nachzugehen, wie experimentelle Observablen wie der elliptische Fluß beeinflußt werden. Um die zeitliche Entwicklung der thermischen Fluktuationen des chiralen Feldes in der Nähe des kritischen Punktes wird es in Kapitel 4 gehen. Mit dem Vorhandensein des kritischen Punktes gehen so genannte kritische Phänomene einher. Eines dieser Phänomene ist das Folgende: Am kritischen Punkt werden die Fluktuationen des chiralen Feldes im Idealfall eines unendlich großen Systems im thermischen Gleichgewicht über unendlich groß Entfernungen korreliert sein. Allerdings kann die Entfernung, über welche die Fluktuationen miteinander korreliert sind - man spricht auch von der so genannten Korrelationslänge - im Falle eines endlichen und expandierenden Systems nicht unendlich groß werden. Bei Kern-Kern-Kollisionen handelt es sich um ein solches System. Im Rahmen der chiralen Hydrodynamik wird also untersucht werden, wie sich die Korrelationslänge am kritischen Punkt in Abhängigkeit von der anfänglichen Systemgröße verhält. Abschließend wird in Kapitel 5 untersucht, wie sich die Fluktuationen des chiralen Feldes auf die Energie- und Baryonendichte auswirken. Durch die Fluktuationen des chiralen Feldes entwickeln sich Inhomogenitäten in der Energie- und Baryonendichte, welche einen Einfluß auf experimentelle Observablen zeigen könnten.

# KOLLEKTIVE OBSERVABLEN

In den vorangegangenen beiden Kapiteln wurde bereits diskutiert, daß man mit Hilfe von hochenergetischen Kern-Kern-Kollisionen versucht, ein dichtes und heißes System von stark wechselwirkenden Teilchen zu erzeugen. Dabei hofft man, daß die in der frühen Phase erzeugten Teilchen ausreichend oft streuen, damit ein lokales thermisches Gleichgewicht zustande kommt und sich die Teilchen wie eine Flüssigkeit verhalten. Wenn ein solcher Zustand erreicht ist und sich die Teilchen damit nicht mehr wie freie Teilchen verhalten, sollte sich dies in einem kollektiven Verhalten wie dem so genannten Fluß widerspiegeln.

Die Untersuchungen in diesem Kapitel werden sich also mit kollektivem Verhalten von stark wechselwirkender Materie befassen. Im nächsten Abschnitt soll zunächst erläutert werden, was man unter dem so genannten Fluß (im Englischen spricht man von *Flow*) versteht. Anschließend werden die für die Untersuchungen mit der Chiralen Hydrodynamik benötigten Anfangsbedingungen diskutiert. In Abschnitt 3.3 wird zunächst die zeitliche Entwicklung von Energiedichte und chiralem Feld untersucht, wobei die Auswirkung der Nichtgleichgewichtsbeschreibung erkennbar sein werden. Die Betrachtungen zum kollektiven Fluß schließen sich dann in Abschnitt 3.4 an.

## 3.1 Kollektive Bewegung, Azimuthale Impulsanisotropie und Elliptischer Fluß

Ein intuitives Verständnis von Fluß, also kollektiver Bewegung, ist eng verbunden mit einer makroskopischen Beschreibung des Flusses mit Hilfe der Hydrodynamik [2, 31, 32]. Es ist oft einfacher hydrodynamische Konzepte wie Temperatur, Druck und Flußgeschwindigkeit zu verwenden, um kollektive Bewegungen zu beschreiben - selbst wenn noch nicht geklärt ist, ob es in Kern-Kern-Kollisionen tatsächlich zu einem thermischen Gleichgewicht kommt.

In der Hydrodynamik wird der Fluß durch Druckgradienten verursacht. Im Anfangszustand einer Kern-Kern-Kollision gibt es nur eine kollektive Bewegung: die longitudinale Bewegung der zwei aufeinander zu fliegenden Kerne. Bei ausreichend hohen Energien (über 5 GeV/A) kann die anfängliche Bewegung nicht mehr vollständig

gestoppt werden, selbst bei großen Kernen (mit  $A \geq 200$ ) die zentral stoßen. Diese Bewegung vom hydrodynamisch erzeugten longitudinalen Fluß zu unterscheiden ist außerordentlich kompliziert. Daher konzentriert man sich auf den *transversalen* kollektiven Fluß, senkrecht zur Bewegungsrichtung der stoßenden Kerne. Denn zu Beginn der Kollision gibt es keine Bewegung in die transversale Richtung und kollektive Bewegungen in dieser Richtung werden eindeutig durch die Kollision erzeugt.

Beim transversalen Fluß unterscheidet man nun zwischen dem transversalen Fluß selbst (manchmal wird dieser als radialer Fluß bezeichnet [33]) und zwischen Anisotropien des transversalen Flusses - gerichteter und elliptischer Fluß. Der transversale Fluß wird mit Hilfe von so genannten transversalen Masse-Spektren experimentell untersucht. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch die Anisotropie des transversalen Flusses - genauer der elliptische Fluß - untersucht werden.

Im Gegensatz zum transversalen Fluß selbst bezeichnet der gerichtete oder elliptische Fluß keine kollektiven Bewegungen, sondern Anisotropien des Endzustandes - genauer des Teilchenspektrums, welches sich nach dem Ausfrieren ergibt - einer Kern-Kern-Kollision.

Um nun eine messbare Größe für die azimuthale Anisotropie des Teilchenspektrums nach dem Ausfrieren zu erhalten werden, die Teilchenspektren in jeder einzelnen Kollision (siehe [34]) in der folgenden Form nach dem Azimutwinkel  $\phi$  (gemessen relativ zur Reaktionsebene) entwickelt

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dyd\phi} &= \frac{dN}{2\pi dy} (1 + 2v_1 \cos(\phi) + 2v_2 \cos(2\phi) + \dots) \quad , \\ \frac{dN}{p_T dy d\phi dp_T} &= \frac{dN}{p_T 2\pi dy dp_T} (1 + 2v_1(p_T) \cos(\phi) + 2v_2(p_T) \cos(2\phi) + \dots) \quad .(3.1) \end{aligned}$$

Dabei entsprechen die Koeffizienten  $v_1$  und  $v_2$  dem *gerichteten* bzw. *elliptischen* Fluß. Hierbei bezeichnet  $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$  den Transversalimpuls und  $y = \tanh^{-1}(p_z/E)$  die longitudinale Rapidität. Für zentrale Kollisionen verschwinden alle Koeffizienten  $v_i$ , da für diesen Fall das System eine Zylindersymmetrie besitzt. Im Falle eines symmetrischen Kollisionssystems, d.h. zwei identische Kerne kollidieren, sind die Koeffizienten  $v_1, v_3, \dots$  bei Mitrapidität Null. Im folgenden soll nun der elliptische Fluß diskutiert werden.

## Elliptischer Fluß

In einer nicht-zentralen Kern-Kern-Kollision ist die Produktion von Primärteilchen azimuthal isotrop. Da der Überlappbereich der beiden kollidierenden Kerne im Orts-

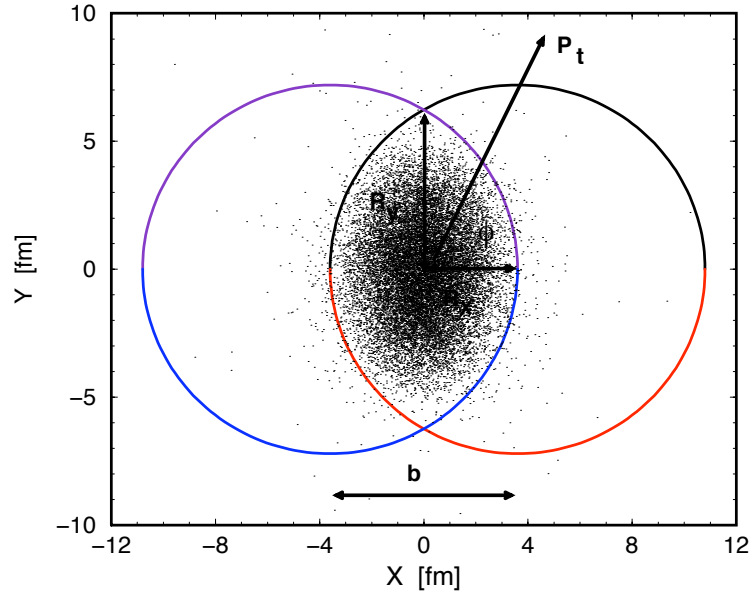


Abbildung 3.1: Reaktionsebene einer semizentralen  $Au + Au$  Kollision für einen Stoßparameter  $b = 7$  fm, entnommen aus [2]. Die Dichte der Punkte ist proportional zu Zahl der an der Reaktion teilnehmenden Nukleonen im Überlappbereich der beiden Kerne.

raum aber nicht isotrop ist, können die Sekundärkollisionen zu einer meßbaren anisotropen Teilchenverteilung im Impulsraum führen. Wie in Abbildung 3.1 (entnommen aus [2]), gezeigt müssen Teilchen, welche aus der Reaktionsebene heraus fliegen im Durchschnitt eine längere Distanz durch dichte Materie zurücklegen, als wenn sie sich innerhalb der Reaktionsebene bewegen würden. Damit haben Teilchen, die sich aus der Reaktionsebene heraus bewegen, eine größere Wahrscheinlichkeit, mehrfach zu streuen und somit ihre Bewegungsrichtung zu verändern. Daher werden sich nach dem Ausfrieren mehr Teilchen in der Reaktionsebene bewegen als senkrecht dazu und damit ist der Koeffizient  $v_2$  in Gleichung (3.1) positiv.

Im Rahmen einer hydrodynamischen Beschreibung läßt sich das Aufbauen des elliptischen Flusses durch die Betrachtung von Druckgradienten verstehen. Im Durchschnitt ist der Druckgradient zwischen dem dichten Zentrum des Systems und dem umgebenden Vakuum bei einer Bewegung innerhalb der Reaktionsebene größer als bei einer Bewegung aus der Reaktionsebene heraus (da in dieser Richtung das System weniger dicht ist). Hiermit wiederum ergibt sich eine höhere Flußgeschwindigkeit innerhalb der Reaktionsebene als aus ihr heraus. Und damit ergibt sich ein größerer mittlerer Impuls innerhalb der Reaktionsebene als senkrecht dazu.

Der elliptische Fluß wird also vorwiegend erzeugt durch die wiederholte Streuung der erzeugten Teilchen und der Geometrie des Systems. Die Asymmetrie des Systems ist am stärksten ausgeprägt direkt nach Beginn einer Kollision und nimmt mit der Zeit ab. Wie schnell die Anisotropie mit der Zeit abnimmt, hängt von der Streurrate ab. Daher wird eine große elliptische Anisotropie und damit ein großer Wert von  $v_2$  als ein Signal dafür gesehen, daß in der Frühphase einer Kollision extrem viele wiederholte Streuungen stattfinden. Dies ist damit ein Zeichen für ein frühes Aufbauen der Druckgradienten und eine frühe Thermalisierung [35, 36]. Da die Hydrodynamik von einer verschwindenden mittleren freien Weglänge und damit von unendlich hohen Streuraten ausgeht, wird außerdem angenommen, daß die hydrodynamische Beschreibung eine obere Grenze für die elliptische Anisotropie liefert.

Dazu sei angemerkt, daß die Verbindung zwischen  $v_2$  und einem frühen Aufbau des Drucks schwer zu quantifizieren ist, denn es gibt die Unsicherheit, wann mit der hydrodynamischen Beschreibung begonnen werden kann. Wenn der Druckaufbau und die Thermalisierung lange (einige  $fm/c$ ) benötigen, können sich die Teilchen, die in den ersten Kollisionen erzeugt wurden, erheblich in der transversalen Richtung bewegen. Dies führt zu großen Unsicherheiten bei der Bestimmung der Anfangsbedingungen, für eine ausführlichere Diskussion siehe [2]. Realistische Anfangsbedingungen können zudem zu einem nicht verschwindenden Fluß bei  $t = 0$  führen [37, 38, 39, 40, 41].

Bei der Definition von  $v_2$  werden die Teilchenspektren nach dem Ausfrieren verwendet. Um nun aber zu verstehen, wie der elliptische Fluß sich in der hydrodynamischen Evolution entwickelt, wird die so genannte azimuthale Impulsanisotropie [42]

$$\epsilon_p = \frac{\langle T^{xx} - T^{yy} \rangle}{\langle T^{xx} + T^{yy} \rangle} \quad (3.2)$$

verwendet.  $T^{xx}$  und  $T^{yy}$  sind hierbei die transversalen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors  $T^{\mu\nu}$  und  $\langle \cdot \rangle$  bezeichnet die Mittelung in der transversalen Ebene bei festgehaltenem  $t$ . Der Einfluß der Zustandsgleichung auf die Ausbildung der Impulsanisotropie ist sehr kompliziert und hängt sehr stark von den kollektiven Bewegungen in der Flüssigkeit zu jedem einzelnen Zeitpunkt der Evolution ab, wie in [42] diskutiert wird.

Gleichermaßen ist der Zusammenhang zwischen  $v_2$  und  $\epsilon_p$  kompliziert. Während  $\epsilon_p$  die Anisotropie der kollektiven Flußgeschwindigkeit mißt, gibt  $v_2$  Auskunft über die Anisotropie der Teilchenverteilung nach dem Ausfrieren. In [43] wird gezeigt, daß  $\epsilon_p$  beim Ausfrieren ungefähr mit dem  $p_t$ -gewichteten elliptischen Fluß übereinstimmt (siehe hierzu auch Referenz 54 in [42]). Die Zeitentwicklung von  $\epsilon_p$  gibt damit



Aufschluß, wie der elliptische Fluß während einer Kollision gebildet wird.

## 3.2 Anfangsbedingungen und numerische Parameter

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Anfangsbedingungen für die numerische Lösung diskutiert werden. Ziel ist es, qualitative Auswirkungen des Phasenübergangs im Nichtgleichgewicht zu verstehen. Daher wird auch die Einschränkung  $\mu = 0$  verwendet und die Art des Phasenübergangs durch die Wahl der Kopplungskonstanten  $g$  festgelegt. Die zwei betrachteten Fälle sind zum einen für  $g = 3.7$  ein Übergang am kritischen Punkt und zum anderen für  $g = 5.5$  einen Phasenübergang erster Ordnung.

Die Anfangsbedingungen für die Untersuchung der azimuthalen Impulsanisotropie sollen eine semirealistische Parametrisierung eines heißen *Feuerballs* [44] liefern, wie er in einer hochenergetischen Kern-Kern Kollision erzeugt wird. Daher wird für die Verteilung der Energiedichte der Quarks  $e$  zur Zeit  $t = 0$  die folgende Form gewählt

$$e(t = 0, \vec{x}) = \begin{cases} e_{\text{eq}} & : x^2 b^2 + y^2 a^2 < (ab)^2 \wedge z < l_z \\ 0 & : x^2 b^2 + y^2 a^2 > (ab)^2 \vee z > l_z \end{cases}, \quad (3.3)$$

die Quarks sind damit in  $z$ -Richtung gleichförmig verteilt (über eine Länge von  $2l_z$ ) und ein Schnitt in der  $x-y$ -Ebene besitzt die Form einer Ellipse. Dabei entspricht  $e_{\text{eq}}$  dem Gleichgewichtswert der Energiedichte bei einer anfänglichen Temperatur von  $T_i \approx 160$  MeV, so daß sich die Quarks anfänglich in der chiralen restaurierten Phase befinden. Für die folgenden Rechnungen wird  $a = r_A - \tilde{b}/2$  und  $b = \sqrt{r_A^2 - \tilde{b}^2/4}$  gewählt, wobei  $\tilde{b}$  den Stoßparameter von zwei kollidierenden Kernen mit Radius  $r_A$  ist. Im weiteren wird  $r_A = 5$  fm und  $\tilde{b} = 2$  fm gewählt. Die ellipsoide Gestalt soll also in erster Näherung den mandelförmigen Überlapp von zwei kollidierenden Kernen darstellen.

Für die kollektive Geschwindigkeit der Quarks in longitudinaler Richtung  $z$  (entlang der Strahlachse) wird ein linearer Anstieg mit  $z$  angenommen:

$$v_z(t = 0, \vec{x}) = \frac{z}{l_z} \cdot v_{\text{max}} \quad , \quad (3.4)$$

wobei  $v_{\text{max}} = 0.2$ . Die Transversalen Komponenten  $v_x$  und  $v_y$  von  $\vec{v}(t = 0)$  werden zu Null gesetzt.

Innerhalb der heißen Materie befindet sich das System in der chiralen restaurierten Phase und somit sollte das chirale Feld einen kleinen Wert besitzen. Außerhalb

befindet sich das chiral gebrochene Vakuum, für welches das chirale Feld den Vakuumerwartungswert annimmt. Da für die Lösung der Bewegungsgleichungen des chiralen Feldes andere numerische Methoden als für die hydrodynamischen Gleichungen verwendet werden, ist es hilfreich für das chirale Feld einen weniger scharfen Übergang zwischen den beiden Phasen zu wählen, als es bei der Energiedichte der Fall ist. Hierfür wird eine Woods-Saxon-artige Verteilung [45] gewählt, die dafür sorgt, daß die Werte des chiralen Feldes innerhalb der Quarkmaterie sehr klein sind und am Rand sehr schnell zum Vakuumerwartungswert übergehen. Die Anfangsbedingungen für die chiralen Felder sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma(t=0, \vec{x}) &= \delta\sigma(\vec{x}) + f_\pi \\ &+ (\sigma_{\text{eq}} - f_\pi) \cdot \left[ 1 + \exp\left(\frac{\tilde{r} - \tilde{R}}{\tilde{a}}\right) \right]^{-1} \cdot \left[ 1 + \exp\left(\frac{|z| - l_z}{\tilde{a}}\right) \right]^{-1}, \\ \vec{\pi}(t=0, \vec{x}) &= \delta\vec{\pi}(\vec{x}) = 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tilde{R} &= \begin{cases} \frac{ab\tilde{r}}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}} & : \tilde{r} \neq 0 \\ a & : \tilde{r} = 0 \end{cases},\end{aligned}\tag{3.6}$$

und  $\tilde{a} = 0.3$  fm die Oberflächendicke der Woods-Saxon-artigen Verteilung ist. Hierbei ist  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0$  der Wert des  $\sigma$ -Feldes welcher dem Gleichgewichtswert der Energiedichte  $e_{\text{eq}}$  entspricht.

## Anfängliche Fluktuationen der chiralen Felder

$\delta\sigma(\vec{x})$  und  $\delta\vec{\pi}(\vec{x})$  stellen die anfänglichen, zufälligen Fluktuationen der chiralen Felder dar. Wie bereits erwähnt wurde, liegt der Schwerpunkt der Untersuchungen in dieser Arbeit darin zu untersuchen, wie die anfänglichen Fluktuationen durch die Anwesenheit eines Phasenübergangs (oder Crossovers) beeinflusst werden und wie die hydrodynamische Expansion des Systems verändert wird.

Zunächst muß nun die Verteilung für die Fluktuationen festgelegt werden. Zum Beispiel könnte man davon ausgehen, daß sich die anfänglichen Fluktuationen in einem thermischen Gleichgewicht befinden und ihre Verteilung damit vom effektiven Potential  $V_{\text{eff}}$  bei gegebener Anfangstemperatur (und -dichte) abhängt. Eine Betrachtung des effektiven Potentials bei ausreichend hohen Anfangstemperaturen

zeigt jedoch, daß das Potential für die verschiedenen Werte von  $g$  eine ähnliche Form hat - unabhängig davon ob die Entwicklung des Systems durch einen Crossover, den kritischen Punkt oder einen Phasenübergang führt.

Für die Anfangsbedingungen wird im folgenden eine Gaußverteilung für die Fluktuationen verwendet. Zum einen stimmt diese Verteilung grob mit der Form des effektiven Potentials bei den gewählten Anfangsbedingungen überein. Zum anderen zeigte sich in einer Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fluktuationen (Abschnitt 3.3), daß diese bereits nach kurzer Zeit durch die Form des Potentials bestimmt sind (siehe Abschnitt 4.3).

Daher wird für die Verteilung der anfänglichen Fluktuationen eine Gaußverteilung gewählt

$$P[\delta\phi_a] \propto \exp\left(-\frac{\delta\phi_a^2}{2\langle\delta\phi_a^2\rangle}\right) \quad . \quad (3.7)$$

Hierbei wird keine Summation über den Index  $a$  ausgeführt. Für die Standardabweichung wird in den folgenden Rechnungen ein Wert von

$$\sqrt{\langle\delta\phi_0^2\rangle} \equiv \sqrt{\langle\delta\sigma^2\rangle} = v/3 \quad (3.8)$$

verwendet. Diese Fluktuationen sind ausreichend groß um die Form des effektiven Potentials zu untersuchen. Zugleich sind sie ausreichend klein um eine störungstheoretische Korrektur ihres Beitrags zum effektiven Potential, wie in Abschnitt 2.7 beschrieben, durchführen zu können.

Die Zeitableitungen der Felder werden zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf Null gesetzt. Für die numerischen Rechnungen wird  $\delta\vec{\pi} \equiv 0$ , d.h.  $\langle\delta\phi_{1,2,3}^2\rangle = 0$  angenommen, denn in den folgenden Untersuchungen wird es um den prinzipiellen Einfluß der dynamischen Beschreibung gehen. Es geht nicht um Observablen bezüglich der Fluktuationen oder kohärenten Pionproduktion durch den Zerfall eines klassischen Feldes. Der Beitrag durch kohärente Pionproduktion zur absoluten Pionmultiplizität macht nur einen kleinen Teil aus [46, 47, 48, 49, 50].

Durch die rein zufälligen anfänglichen Fluktuationen besteht zwischen den Fluktuationen an unterschiedlichen Orten keine Korrelation, bzw. die Korrelationslänge bei der Diskretisierung auf einem Gitter ist gegeben durch den künstlichen Gitterabstand  $\Delta x$ . Physikalisch gesehen ist dies unrealistisch, da man davon ausgehen muß, daß ein System über eine bestimmte Entfernung hinweg kausal zusammenhängend ist. Außerdem sollte die Korrelationslänge nicht von der Feinheit des Gitters abhängen. Daher sollen die durch (3.7) gegebenen Fluktuationen im Folgenden über eine Distanz von  $\xi \simeq 1$  fm miteinander korreliert werden.

Um die Fluktuationen miteinander zu korrelieren, wird das so genannte *coarse graining* Verfahren verwendet. Hierfür werden zunächst an jedem einzelnen Gitterpunkt die Werte für  $\delta\sigma(x)$  gemäß der Verteilung (3.7) unabhängig voneinander ausgewürfelt. Danach werden in einem zweiten Schritt die Fluktuationen jeweils über einen endlichen Raumbereich um jeden einzelnen Gitterpunkt gemittelt. Den Wert, den man durch diese Mittelung erhält, wird nun dem Gitterpunkt als neuer Wert des chiralen Feldes zugewiesen. Formal läßt sich diese Mittelung schreiben als

$$\phi'_a(\vec{x}) = \frac{1}{n^3} \times \sum_{i,j,k=0..n-1} \phi_a(\vec{x} + i\Delta x \vec{e}_1 + j\Delta x \vec{e}_2 + k\Delta x \vec{e}_3) . \quad (3.9)$$

Hierbei definieren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  eine globale orthonormale Basis und  $\vec{x} = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3, 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \dots$ , enthält alle Punkte in dem Volumen, über welches gemittelt wird. Da hier die Fluktuationen über  $\approx 1$  fm korreliert werden sollen und der Gitterabstand  $\Delta x = 0.2$  fm ist, wird in jede Raumrichtung über  $n = \xi/\Delta x \approx 6$  Gitterpunkte gemittelt.

Allerdings sorgt die obige Mittelung für eine “Abkühlung” der Fluktuationen,

$$\langle \delta\phi_a'^2 \rangle \neq \langle \delta\phi_a^2 \rangle . \quad (3.10)$$

Daher werden in einem dritten Schritt die chiralen Felder an jedem einzelnen Gitterpunkt reskaliert durch

$$\phi''_a(\vec{x}) = \phi'_a(\vec{x}) \sqrt{\frac{\langle \delta\phi_a^2 \rangle}{\langle \delta\phi_a'^2 \rangle}} . \quad (3.11)$$

Durch Anwendung dieses Verfahrens erhält man sinnvolle physikalische Korrelationslängen und die gewünschten Fluktuationen in den Anfangsbedingungen für das chirale Feld. Abbildung 3.2 zeigt alle drei Schritte des Verfahrens. Ganz oben ist die ursprüngliche und rein zufällige Verteilung  $\delta\phi(x)$  der Fluktuationen über einzelne Ortspunkte (zum Beispiel in  $x$ -Richtung) gemäß der Verteilung (3.7) dargestellt. Diese Fluktuationen sind nicht miteinander korreliert. In der Mitte sind die Fluktuationen  $\delta\phi'(x)$  nach der Mittelung (3.9) gezeigt, wobei jeweils über sechs benachbarte Punkte gemittelt wurde. Es läßt sich sowohl die Korrelation der Fluktuationen über eine bestimmte Distanz erkennen, als auch die deutliche “Abkühlung” - die Amplituden sind deutlich geringer im Vergleich zur Darstellung des ursprünglichen  $\delta\phi(x)$ . Die unterste Abbildung zeigt schließlich die Fluktuationen nach Anwendung der Korrektur (3.11). Die Breite der Verteilung der Fluktuationen ist hier die gleiche wie in der obersten Abbildung und die Fluktuationen sind darüber hinaus über einen bestimmten Raumbereich korreliert.

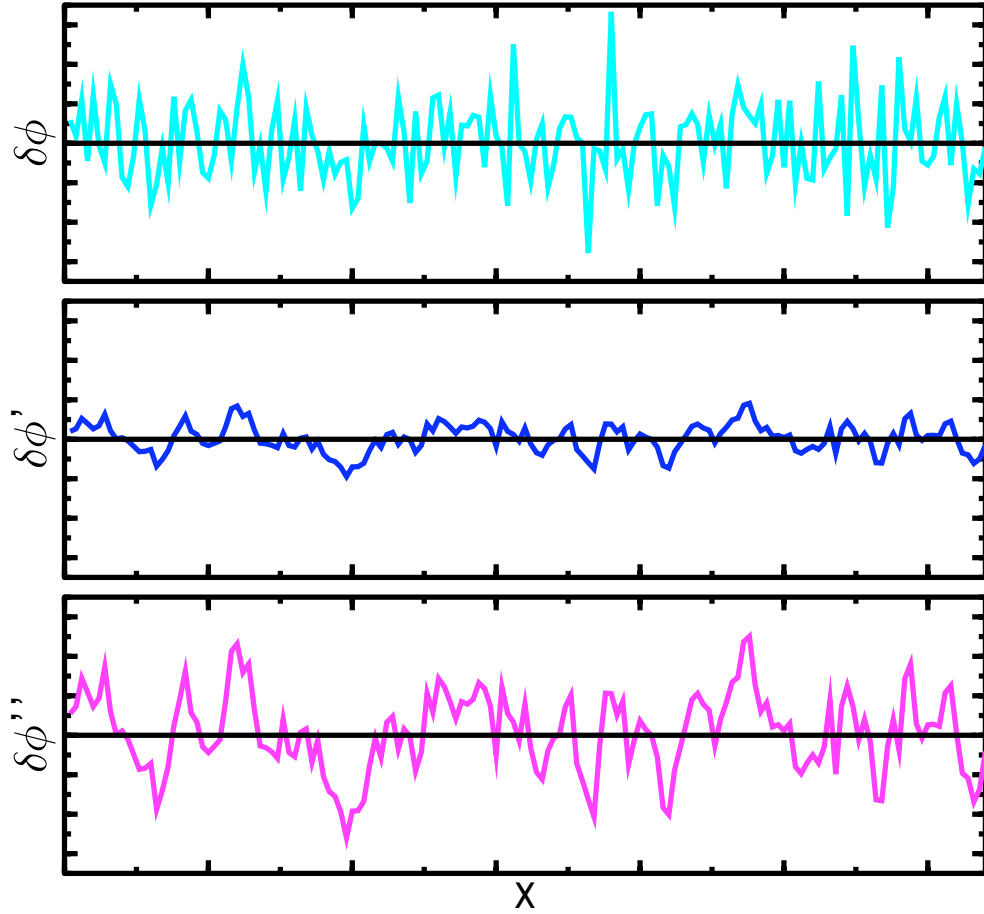


Abbildung 3.2: Verschiedene Schritte des Coarse Graining: unkorrelierte Fluktuationen (oben), korrelierte aber abgekühlte Fluktuationen (mitte) korrelierte Fluktuationen mit der gewünschten Standardabweichung (unten)

### 3.3 Ergebnisse: Zeitentwicklung des chiralen Feldes und der Energiedichte

Nachdem nun die Anfangsbedingungen diskutiert wurden, sollen in den nächsten beiden Abschnitten die Ergebnisse zur Zeitentwicklung der Energiedichte, der chiralen Felder und der azimuthalen Impulsanisotropie diskutiert werden.

Bei der Betrachtung der zeitlichen Entwicklung des chiralen Feldes lassen sich deutliche Unterschiede zwischen den beiden betrachteten Szenarien erkennen. Abbildung 3.3 stellt die Zeitentwicklung des  $\sigma$ -Feldes entlang der x- bzw. y-Achse für

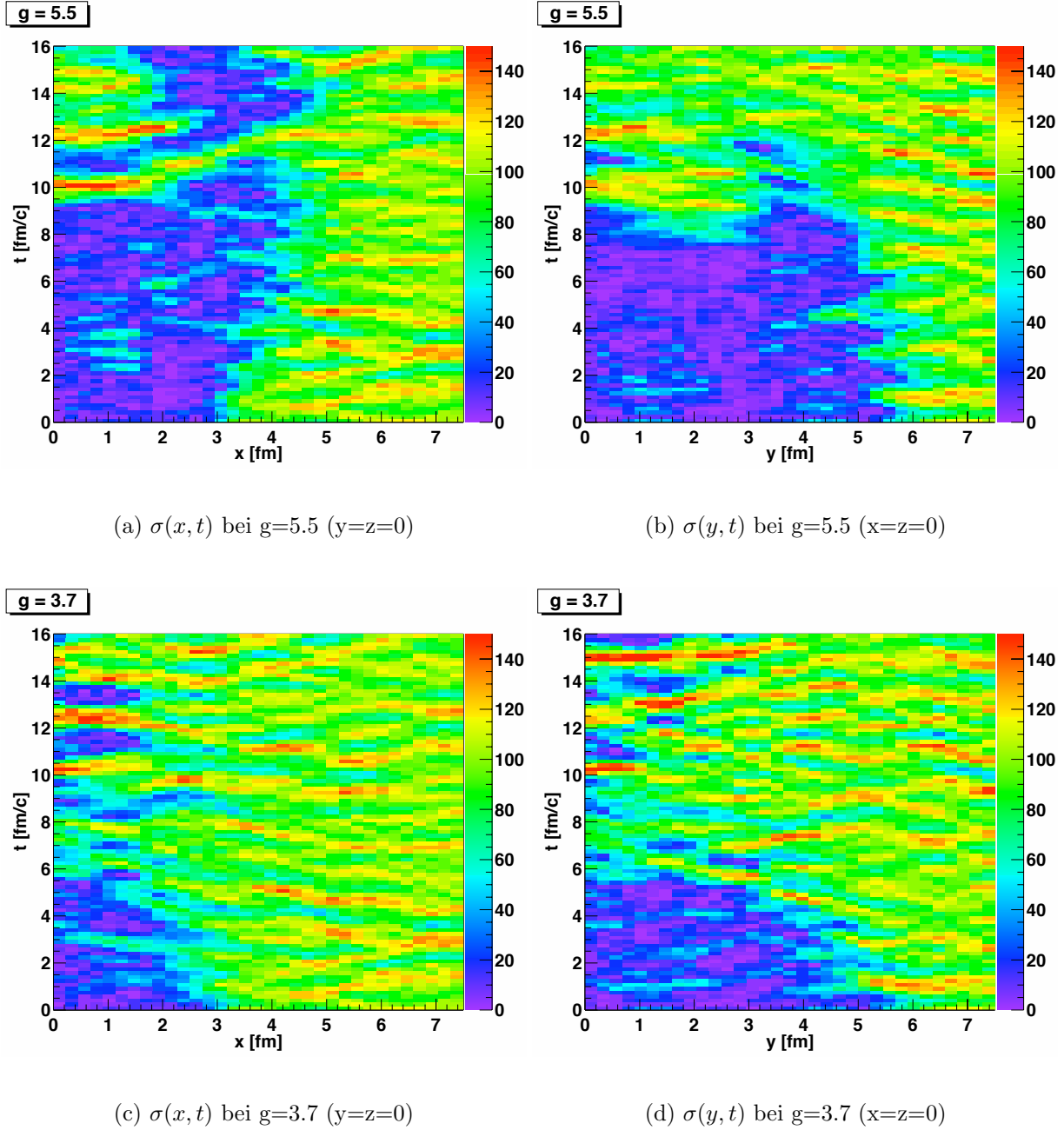


Abbildung 3.3: Zeitentwicklung des  $\sigma$ -Feldes (in Einheiten von MeV) entlang ausgewählter Achsen ( $x$  und  $y$ ) und für verschiedene Übergänge (kritischer Punkt und Phasenübergang erster Ordnung).

$g = 3.7$  und  $g = 5.5$  dar. Zur Zeit  $t = 0$  besitzt das Feld innerhalb der heißen Region einen kleinen Wert - dies entspricht der chiral restaurierten Phase. Diese Region ist umgeben vom physikalischen Vakuum  $\sigma = f_\pi = 93$  MeV.

Für den Phasenübergang erster Ordnung ( $g = 5.5$ ) trennt ein Maximum die beiden entarteten Minima des effektiven Potentials. Abbildung 3.3(a) und 3.3(b) läßt erkennen, daß dieses trennende Maximum zu einer klar erkennbaren Oberfläche im Ortsraum führt, welche das Vakuum von der chiral symmetrischen Phase trennt. Für die gewählten Anfangsbedingungen sind die Fluktuationen nicht stark genug, um das Maximum einfach zu überwinden. Dennoch lassen sich dynamische Fluktuationen in die gebrochene Phase beobachten, zum Beispiel bei  $x \simeq 1$  fm und  $t \simeq 2 - 4$  fm/c, welche aber wieder kollabieren. Die hier gezeigten dynamischen Rechnungen stehen in Übereinstimmung mit früheren Überlegungen, nach denen die Nukleation ein langsamer Prozeß im Vergleich zu den Zeitskalen einer Schwerionenkollision ist [47, 51, 52]. Zur Zeit  $t \simeq 9$  fm findet der Phasenübergang in die chiral gebrochene Phase recht plötzlich statt. In einigen Bereichen überleben aber noch Blasen, die sich in der chiral symmetrischen Phase befinden, auch wenn der Großteil des Systems bereits in der gebrochenen Phase ist - zum Beispiel bei  $x \simeq 3$  fm (in Abbildung 3.3(a) oder  $y \simeq 4$  fm (in Abbildung 3.3(b)).

Die Situation sieht im Falle eines Übergangs am kritischen Punkt ( $g = 3.7$ ) deutlich anders aus, siehe Abbildung 3.3(d) und 3.3(d). Hier verschwindet das Maximum, welches die die Minima im effektiven Potential trennt, und das Potential ist relativ flach. Dies erkennt man auch daran, daß es nicht wie im Fall eines Phasenübergangs erster Ordnung eine klar erkennbare Grenzfläche gibt, welche das Vakuum und die hochdichte Quarkphase voneinander trennen. Aufgrund des flachen Potentials kann das Feld (bis zu späten Zeiten) mit großen Amplituden von  $\sigma \sim 0$  bis  $\sigma > f_\pi$ ) fluktuieren. Die Fluktuationen des chiralen Feldes gehen über große Raumbereiche von  $\approx 1 - 3$  fm (zum Beispiel bei  $t \approx 9, 12$ , und  $14$  fm/c in Abbildung 3.5(c)), was verglichen mit der anfänglichen Größe des Systems recht groß ist.

Einen etwas anderen Blickwinkel auf die zeitliche Entwicklung des Systems gibt Abbildung 3.4. Gezeigt sind hier Histogramme für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der chiralen Felder um  $x = y = z = 0$  innerhalb einer Kugel mit dem Radius 2 fm für drei verschiedene Zeiten. Es läßt sich deutlich erkennen, daß die Verteilung von  $t = 4$  fm zu  $t = 10$  fm breiter wird. Dabei bleibt das Maximum der Verteilung zunächst bei kleinen Werten für das chirale Feld. Für spätere Zeiten wird die Verteilung wieder schmaler und das Maximum verschiebt sich zu größeren Werten für die chiralen Felder - das heißt, der Übergang zur chiral gebrochenen Phase ist zu diesem Zeitpunkt ( $t = 14$  fm) bereits erfolgt. Darüber hinaus ist bemerkenswert, daß sich die Verteilungen bei  $t = 4$  fm und  $t = 14$  fm sehr gut durch Gaußverteilungen beschreiben lassen, d.h. das Potential im wesentlichen parabelförmig ist.

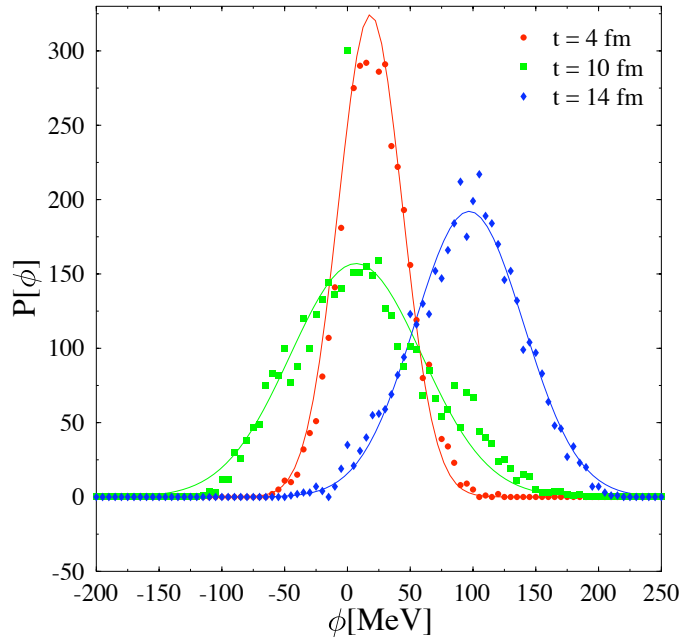


Abbildung 3.4: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die chiralen Felder bei  $x = y = z = 0$  für drei verschiedene Zeiten. Die Linien zeigen Fits mit einer Gaußfunktion mit einer Standardabweichung von 25 MeV ( $t=4$  fm), 53 MeV ( $t=10$  fm) und 43 MeV ( $t=14$  fm).

Für  $t = 10$  fm ist dies im wesentlichen auch der Fall, aber es lassen sich deutliche Abweichungen von einer Gaußverteilung erkennen. Weitere Untersuchungen zur Verteilung der Fluktuationen und der daraus bestimmbaren Korrelationslänge werden im nächsten Kapitel diskutiert.

Die unterschiedlichen liegenden effektiven Potentiale und damit Zustandsgleichungen sollten sich auch in einer unterschiedlichen Entwicklung der Energiedichte zeigen. In Abbildung 3.5 wird die Zeitentwicklung der Ruhesystemsenergiedichte gezeigt. Auch hier lassen sich im Falle des Phasenübergangs erster Ordnung ( $g = 5.5$ ) großskalige Strukturen erkennen (Abbildung 3.5(a) und 3.5(b)). Offenbar können zu späten Zeiten Quarks in Blasen mit  $\sigma \sim 0$  überleben. Diese Blasen befinden sich im Minimum des effektiven Potentials (in dem die chirale Symmetrie restauriert) ist und werden durch das trennende Maximum davon abgehalten, in die gebrochene Phase überzugehen. Eine solche Blase hoher Energiedichte und geringem chiralen Feld - und damit Quarkmasse - läßt sich bei  $x \simeq 3$  fm zur Zeit  $t \simeq 12 - 16$  fm/c in Abbildung 3.5(a) und Abbildung 3.3(a) erkennen. Um in die chiral gebrochene Phase zu gelangen muß ein solcher Bereich hoher Energiedichte und geringer Quark-



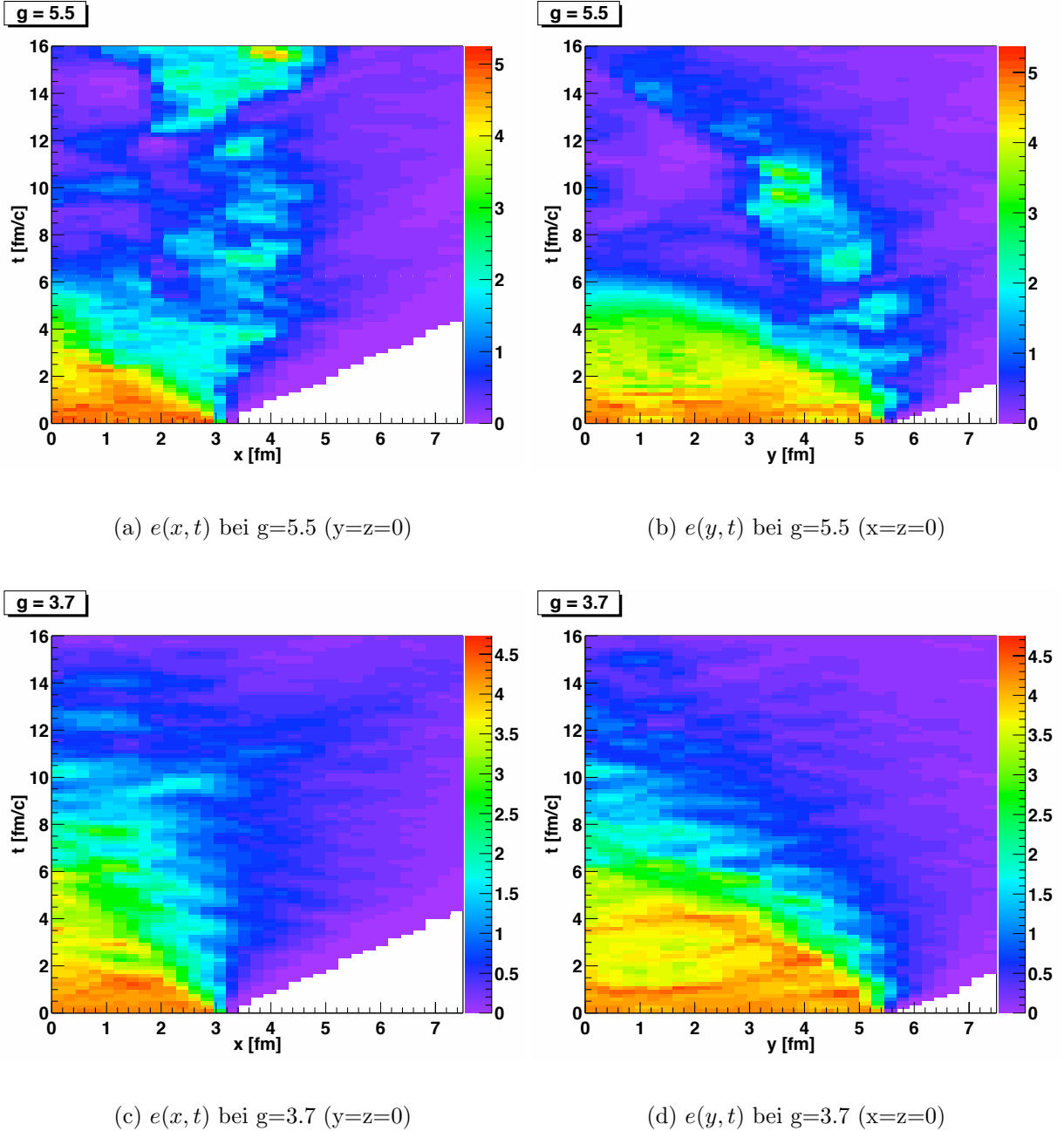


Abbildung 3.5: Zeitentwicklung der Energiedichte in Einheiten der Grundzustandsenergiedichte  $e_0 = 146 \text{ MeV/fm}^3$  entlang der  $x$ -Achse bei  $y = z = 0$ .

masse entweder durch eine starke thermische Fluktuation oder durch das Erreichen des spinodalen Punktes an dem das die Minimum trennende Maximum verschwindet. Am spinodalen Punkt ist das System weit entfernt vom Gleichgewicht und die

kollektive Expansion der Quarks kann dadurch merklich beeinflußt werden.

Die zeitliche Entwicklung für den Fall des kritischen Punktes ist in Abbildung 3.5(c) und 3.5(d) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Energiedichte im Vergleich zum Phasenübergang erster Ordnung über große Zeiten und Entfernungen relativ homogen ist.

Vergleicht man für beide Fälle die Energiedichte im Zentrum bei  $x = y = z = 0$ , so läßt sich erkennen, daß die Energiedichte für den Phasenübergang erster Ordnung deutlich schneller abfällt, als in der Nähe des kritischen Punktes. Dies hat deutliche Auswirkungen auf die Entwicklung des elliptischen Flusses, der im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die unterschiedlichen Zustandsgleichungen einen deutlichen Einfluß auf die zeitliche Entwicklung von Energiedichte und chiralen Feldern hat. Im nächsten Abschnitt soll nun der Einfluß auf die azimuthale Impulsanisotropie untersucht werden. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind in [30] veröffentlicht.

### 3.4 Ergebnisse: Azimuthale Impulsanisotropie

Für die verwendeten Anfangsbedingungen ist  $\epsilon_p(t = 0) = 0$ . Allerdings sind die Druckgradienten in  $x$  und  $y$  Richtung unterschiedlich. Dies führt, wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, zu einer von Null verschiedenen azimuthalen Symmetrie  $\epsilon_p > 0$  für  $t > 0$ .

Abbildung 3.6 zeigt die zeitliche Entwicklung der azimuthalen Impulsanisotropie  $\epsilon_p$ . Zunächst wächst die Anisotropie linear mit der Zeit und nähert sich einem Grenzwert an, wenn die Asymmetrie der Energiedichte- und Druckgradienten klein werden. Wie bereits für Abbildung 3.5 diskutiert wurde, geschieht dies im Falle eines Phasenübergangs erster Ordnung ( $g = 5.5$ ) früher, als für den Fall des Übergangs in der Nähe des kritischen Punktes ( $g = 3.7$ ). Dieser Unterschied, der durch die verschiedenen Zustandsgleichung verursacht wird, zeigt sich in dem endgültigen Wert für  $\epsilon_p$ .

Man könnte nun annehmen, daß das schnellere Erreichen des Endwertes für  $\epsilon_p$  im Falle des Phasenübergangs erster Ordnung im Widerspruch mit den recht lange überlebenden Blasen mit hoher Energiedichte steht, wie sie zum Beispiel in Abbildung 3.5 zu sehen sind. Allerdings sind diese Blasen mehr oder weniger rotationssymmetrisch und besitzen keine Korrelationen in Bezug auf die Reaktionsebene, die hier in der  $x - z$ -Ebene liegt. Daher reduzieren sie im Mittel die azimuthale Anisotropie.

Zum Vergleich wird in Abbildung 3.6 das Ergebnis für den Fall des Phasenübergangs erster Ordnung ( $g = 5.5$ ) im Gleichgewicht gezeigt. Durch die Verwendung der Gleichgewichtszustandsgleichung besitzen die chiralen Felder für diesen Fall keine explizite Raumabhängigkeit mehr. Die Gleichgewichtszustandsgleichung erhält man für diesen Fall dem in Abschnitt 2.5 beschriebenen Konzeptes. Zunächst müssen die Minima des effektiven Potentials bestimmt werden und danach am Phasenübergang die Gibbs-Konstruktion verwendet werden. In Abbildung 3.6 läßt sich nun deutlich erkennen, daß der Gleichgewichtsphasenübergang für die verwendeten Anfangsbedingungen ein ähnliches Ergebnis für die azimuthale Anisotropie liefert, wie der Phasenübergang am kritischen Punkt bzw. der ebenfalls gezeigte Crossover ( $g = 3.3$ ).

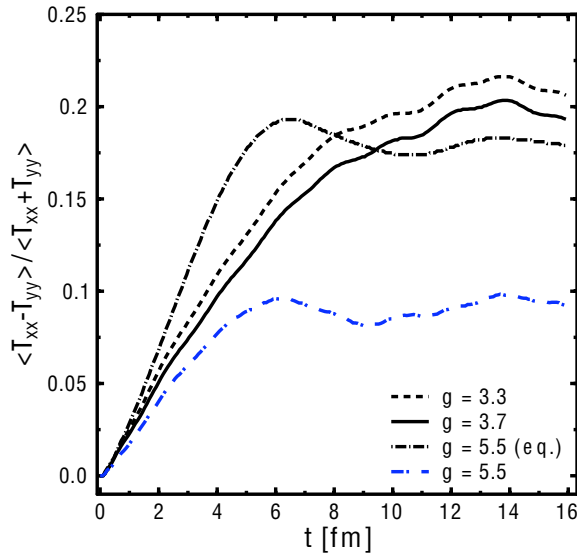


Abbildung 3.6: Zeitentwicklung Impulsanisotropie  $\epsilon_p$  für einen Crossover ( $g = 3.3$ ), einen Phasenübergang zweiter Ordnung am kritischen Punkt ( $g = 3.7$ ) und einen Phasenübergang erster Ordnung ( $g = 5.5$ ) sowohl im Nichtgleichgewicht als auch im Gleichgewicht.

Abbildung 3.7 zeigt experimentelle Daten für  $v_2/\langle p_t \rangle$  als Funktion von  $\langle p_t \rangle$ . Die Daten für  $v_2$  als Funktion der Kollisionsenergie sind aus Abbildung 24 in [53] entnommen. Hier wurde  $v_2$  in Abhängigkeit der Kollisionsenergie im Schwerpunktsystem  $\sqrt{s}$  gezeigt. Jedoch stellt  $\langle p_t \rangle$  eine wesentlich natürlichere Skala für  $v_2$  dar [58]: Betrachtet man bei ausreichend hohen Energien das differentielle  $v_2(p_t)$  von negativ geladenen Hadronen, so ist dies proportional zu  $p_t$ ,

$$v_2(p_t) \propto p_t \quad , \quad (3.12)$$

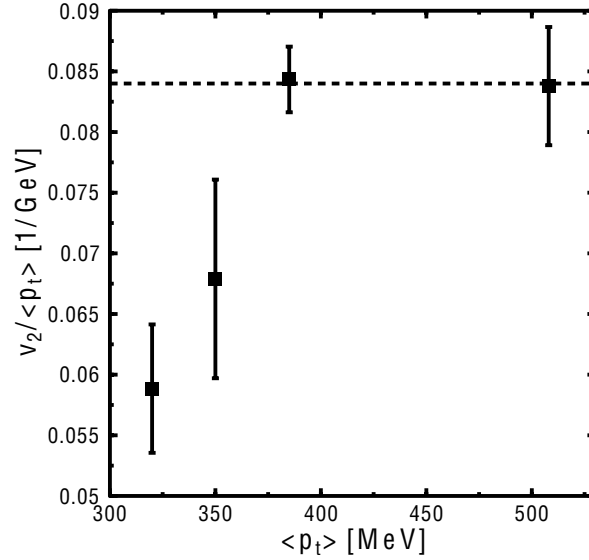


Abbildung 3.7: Anregungsfunktion von  $v_2/\langle p_t \rangle$  der negativ geladenen Teilchen in mittzentralen Stößen von AGS bis RHIC Energien. Daten für  $v_2$  sind aus Abbildung 24 in [53] und  $\langle p_t \rangle$  aus [54, 55, 56, 57]

und damit ist die gemittelte Größe  $v_2$  proportional zum mittleren Transversalimpuls

$$v_2 = \langle v_2(p_t) \rangle \propto \langle p_t \rangle \quad . \quad (3.13)$$

Daher wurde in Abbildung 3.7 die Daten aus [53] mit den aus [54, 55, 56, 57] Daten für  $\langle p_t \rangle$  skaliert, um die Abweichung von der natürlicheren  $\langle p_t \rangle$  Skala hervorzuheben.

Zum Beispiel wächst  $v_2$  von der höchsten SPS Energie ( $\sqrt{s} = 18.4$  GeV,  $\langle p_t \rangle \approx 380$  MeV) zur RHIC Energie ( $\sqrt{s} = 130.4$  GeV,  $\langle p_t \rangle \approx 510$  MeV) von  $\approx 3\%$  auf  $\approx 4.5\%$ . Wenn aber mit dem mittleren Transversalimpuls skaliert wird, dann ist der elliptische Fluß in diesen Energiebereichen annähernd konstant [58]. Ein davon abweichendes Verhalten erkennt man bei dem Datenpunkt für die höchste AGS Energie ( $\langle p_t \rangle \approx 320$  MeV) und die untere SPS Energie ( $\langle p_t \rangle \approx 350$  MeV)

Das heißt die Daten scheinen oberhalb der höchsten SPS Energie keine Energie (oder  $\langle p_t \rangle$ ) Abhängigkeit zu zeigen. Außerdem läßt sich ein deutliches Absinken von  $v_2$  im Vergleich von  $\langle p_t \rangle$  bei kleineren Energien erkennen. Zum Beispiel ist der Datenpunkt für die niedrigste SPS Energie um ungefähr zwei Standardabweichungen kleiner als bei hohen Energien.

Qualitativ ist dieses Verhalten vergleichbar mit dem Absinken der azimuthalen Impulsanisotropie, wenn statt einem Crossover Übergang ein Phasenübergang erster Ordnung im Nichtgleichgewicht vorliegt, wie in Abbildung 3.6 gezeigt wurde.

Allerdings müssen noch weitere Untersuchungen erfolgen, bevor sichere Rückschlüsse gezogen werden können.



# KORRELATIONEN IN DER NÄHE DES KRITISCHEN PUNKTES

Ein System in der Nähe des kritischen Punktes befindet sich in einem recht außergewöhnlichem Zustand. Es reagiert selbst auf kleine Störungen bemerkenswert stark. Wenn sich zum Beispiel die Dichte einer Flüssigkeit durch zusätzlichen Druck ändert, hat diese Störung normalerweise nur Auswirkungen bis zu einer Entfernung, die mit der Reichweite der Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeitsmolekülen vergleichbar ist. In der Nähe des kritischen Punktes ist die Entfernung, bis zu der sich eine Störung des Ordnungsparameters (in diesem Fall die Dichte) auswirkt, viel größer als die Reichweite der molekularen Wechselwirkung. Wie groß diese Entfernung bzw. Korrelationslänge wird, hängt von der Entfernung zum kritischen Punkt ab. Am kritischen Punkt schließlich wird die Korrelationslänge unendlich groß und jeder Punkt des System ist mit jedem anderen Punkt im System korreliert.

Das starke Anwachsen der Korrelationslänge führt dazu, dass auch andere physikalische Größen ein ungewöhnliches Verhalten am kritischen Punkt zeigen. Beispiele sind die Kompressibilität von Flüssigkeiten, die magnetische Suszeptibilität von Ferromagneten oder die spezifische Wärmekapazität. Ein besonders anschauliches Beispiel für ein kritisches Phänomen ist die so genannte kritischen Opaleszenz [59]

Wie bereits in Kapitel 2 diskutiert wurde, vermutet man für das QCD Phasendiagramm die folgende Struktur: Die Linie von Phasenübergängen erster Ordnung sollte in einem kritischen Punkt zweiter Ordnung enden [60]. Gibt es nun die Möglichkeit experimentelle Observablen zu finden, mit deren Hilfe man eine Aussage darüber treffen kann, ob dieser kritische Punkt tatsächlich existiert? In den Untersuchungen von [61] wird argumentiert, daß sich die unendliche Korrelationslänge am kritischen Punkt oder sehr große Korrelationslänge in der Nähe des kritischen Punktes, zum Beispiel in Event-by-Event Fluktuationen der *soft pions* (also Pionen mit kleinem Impuls) zeigen sollte. Diese Überlegungen gingen jedoch davon aus, daß es sich um ein unendlich großes System im thermodynamischen Gleichgewicht handelt. In diesem Kapitel soll nun untersucht werden wie stark die Korrelationslänge von der Systemgröße abhängt. Die Chirale Hydrodynamik bietet darüber hinaus eine Nicht-

gleichgewichtsbeschreibung.

Zunächst wird im nächsten Abschnitt die Korrelationslänge etwas genauer betrachtet werden. Danach werden die Anfangsbedingungen für die numerischen Rechnungen gegeben und die Ergebnisse der Rechnungen vorgestellt und diskutiert. Die im Folgenden diskutierten Untersuchungen wurden in [62] veröffentlicht.

## 4.1 Fluktuationen und Korrelationslängen

Thermodynamische Systeme im Gleichgewicht werden für gewöhnlich mit recht hoher Genauigkeit durch die Mittelwerte thermodynamischer Größen beschrieben. Aber es treten auch Abweichungen von den Mittelwerten auf - man spricht dann von Fluktuationen der thermodynamischen Größen - und diese Fluktuationen gehorchen einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung [63]: In der klassischen Thermodynamik ist diese Wahrscheinlichkeit  $w$  für eine thermodynamische Größe  $x$  gegeben durch

$$w(x) \propto \exp(S(x)) \quad , \quad (4.1)$$

wobei  $S$  hierbei die Entropie des Systems in Abhängigkeit der Größe ist, für welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung gesucht ist. Im Falle der in dieser Arbeit vorliegenden Feldtheorie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier für die chiralen Felder) mit der vierdimensionalen effektiven Wirkung  $S_{\text{eff}}$  verbunden über

$$P[\phi] \propto \exp(S_{\text{eff}}(\phi)) \quad . \quad (4.2)$$

Die Korrelationslänge  $\xi$  beschreibt die typische Längenskala über die Fluktuationen von (thermodynamischen) Größen korreliert sind, d.h. sie gibt Auskunft darüber, wie stark sich verschiedene Punkte in einem System über einen bestimmten Abstand beeinflussen.

Formal läßt sich die Korrelationslänge über den folgenden Ansatz definieren. Nach der Ginzburg-Landau Theorie [64] kann man für ein unendliche großes System, welches sich in einem globalen thermischen Gleichgewicht befindet, die Freie Energie  $F$  um den thermodynamischen Erwartungswert  $\phi_0$  entwickeln. Dieser Erwartungswert ist durch das absolute Minimum der freien Energie gegeben. Entwickelt man nun die Freie Energie in ein Polynom um  $\phi_0$

$$F(\bar{\phi}) = a_0 + a_1 \bar{\phi} + a_2 \bar{\phi}^2 + a_3 \bar{\phi}^3 + a_4 \bar{\phi}^4 + \dots + a_N \bar{\phi}^N \quad , \quad (4.3)$$

wobei

$$\bar{\phi} = \frac{\phi - \phi_0}{f_\pi} \quad (4.4)$$



und

$$a_N > 0. \quad (4.5)$$

Die Korrelationslänge  $\xi$  ergibt sich über die zweite Ableitung der Freien Energie an der Stelle  $\phi_0$  zu

$$\frac{1}{\xi^2} = \left. \frac{d^2 F(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}^2} \right|_{\bar{\phi}=0} = 2a_2. \quad (4.6)$$

Für den im folgenden untersuchten Fall des Übergangs am kritischen Punkt ist die Korrelationslänge für  $T \neq T_c$  endlich, da das effektive Potential in der Umgebung von  $\phi_0$  eine deutliche Krümmung besitzt. Am kritischen Punkt bei  $T = T_c$  ändert sich das effektive Potential bei  $\phi_0$  und wird über einen relativ großen Wertebereich von  $\bar{\phi}$  sehr flach. Dies bedeutet die Krümmung wird sehr klein, bzw. verschwindet wenn das System sich dem kritischen Punkt nähert. Und damit divergiert die Korrelationslänge am kritischen Punkt.

In Abbildung 4.1 ist das effektive Potential für das in dieser Arbeit verwendete Modell für  $g = 3.7$  und  $\mu = 0$  abgebildet. Für diese Wahl von  $g$  besitzt die Zustandsgleichung einen kritischen Punkt mit einer Übergangstemperatur von  $T_c = 138.6$  MeV. Man erkennt, daß bei niedrigen Temperaturen das effektive Potential eine deutliche Krümmung am Minimum besitzt. Bei einer Erhöhung der Temperatur verschiebt sich das Minimum zu kleineren Werten des chiralen Feldes und beginnt flacher zu werden. Bei  $T_c$  schließlich wird das effektive Potential sehr flach und zeigt die oben beschriebenen Charakteristika eines kritischen Punktes.

Allerdings gelten diese Überlegungen für eine divergierende Korrelationslänge für unendlich große Systeme, welche sich in einem globalen thermischen Gleichgewicht befinden. Bei einer Kern-Kern-Kollision handelt es sich aber um ein endliches System mit einer relative kleinen Größe, welches darüber hinaus sehr schnell expandiert. Für dieses endliche und expandierende System kann die Korrelationslänge nicht divergieren.

Im Folgenden soll nun untersucht werden, welche Werte die Korrelationslänge in der Nähe des kritischen Punktes in Abhängigkeit von der anfänglichen Systemgröße annehmen kann.

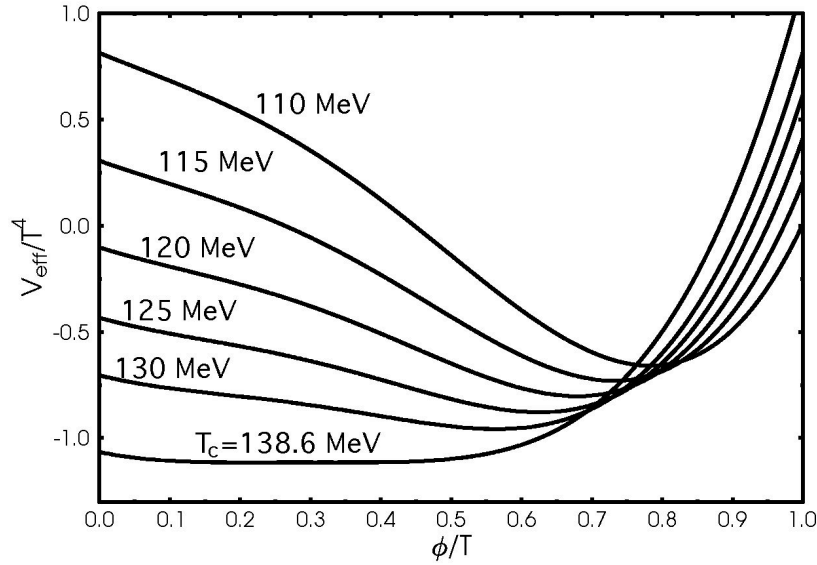


Abbildung 4.1: Das effektive Potential  $V_{\text{eff}}$  bei  $g = 3.7$  und  $\mu = 0$ . Die Zahlen an den Kurven bezeichnen die jeweilige Temperatur, für die das effektive Potential dargestellt ist.

## 4.2 Anfangsbedingungen und numerische Parameter

Um nun die Auswirkungen eines endlichen und expandierenden Systems auf die Korrelationslänge in der Nähe des kritischen Punktes zu untersuchen, werden die folgenden Anfangsbedingungen gewählt. Zunächst wird die Kopplungskonstante zu  $g = 3.7$  (bei  $\mu = 0$ ) gewählt um das effektive Potential für einen Übergang in der Nähe des kritischen Punktes zu erhalten.

Die Energiedichte  $e$  der Quarkflüssigkeit zu Zeit  $t = 0$  wird gewählt zu

$$e(t = 0, r) = e_{\text{eq}} \Theta(R - r) , \quad (4.7)$$

d.h. es handelt sich um eine Kugel in deren Innerem sich die Materie in der chiral restaurierten Phase befindet.  $e_{\text{eq}}$  bezeichnet hierbei den Gleichgewichtswert der Energiedichte bei einer Temperatur von  $T \approx 160$  MeV, welche deutlich oberhalb der Übergangstemperatur von  $T_c \approx 138$  MeV liegt. Die anfängliche Größe des Systems wird durch den Radius der Kugel  $R$  gegeben. Dazu sei bemerkt, daß die Expansionsrate (Hubble Konstante) proportional zu  $1/R$  ist [65], und damit große Systeme eine langsamere Expansion durchlaufen als kleine.

Für die chiralen Felder wird wieder wie im vorangegangenen Kapitel eine Woods-

Saxon-Artige Verteilung

$$\begin{aligned}\sigma(t=0, \vec{x}) &= \delta\sigma(\vec{x}) + f_\pi + (-f_\pi + \sigma_{\text{eq}}) \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^{-1}, \\ \vec{\pi}(t=0, \vec{x}) &= \delta\vec{\pi}(\vec{x}),\end{aligned}\tag{4.8}$$

mit einer Oberflächendicke von  $a = 0.3$  fm gewählt.  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0$  ist der Gleichgewichtswert des  $\sigma$  Feldes welcher der Energiedichte  $e_{\text{eq}}$  entspricht. Damit verschwindet das chirale Feld im inneren der Kugel und steigt am Rand rasch auf den Wert  $f_\pi$ , wo die Materiedichte gering ist.

Die zufälligen Fluktuationen des Feldes  $\delta\sigma(\vec{x})$  und  $\delta\vec{\pi}(\vec{x})$  sind wie bereits im vorangegangenen Kapitel nach Gleichung (3.7) gaußverteilt

$$P[\delta\phi_a] \propto \exp\left(-\delta\phi_a^2/2\langle\delta\phi_a^2\rangle\right) \quad .\tag{4.9}$$

wobei die Breite der Verteilung den Wert  $\sqrt{\langle\delta\sigma^2\rangle} = v/2$  für das  $\sigma$ -Feld besitzt, während das  $\vec{\pi}$ -Feld und seine Fluktuationen für  $t = 0$  und damit auch für alle Zeiten  $t > 0$  verschwinden.

Die Fluktuationen des chiralen Feldes werde wie im vorangegangenen Kapitel beschrieben über eine Entfernung von  $\xi_0 \approx 1.2$  fm miteinander korreliert. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie die anfänglichen Fluktuationen durch den Übergang am kritischen Punkt beeinflusst werden und wie die Korrelationslänge von der anfänglichen Systemgröße abhängt. Im folgenden werden also Untersuchungen mit verschiedenen anfänglichen Systemgrößen durchgeführt, wobei  $R = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  fm gewählt wird. Für jeden Wert von  $R$  werden außerdem mehrere verschiedene Konfigurationen für die chiralen Felder verwendet und darüber gemittelt.

### 4.3 Ergebnisse: Zeitentwicklung der Korrelationslänge

Bevor die zeitliche Entwicklung der Korrelationslänge weiter unten diskutiert wird, soll zunächst das dynamisch bestimmte effektive Potential an sich kurz betrachtet werden. Abbildung 4.2 zeigt das dynamisch bestimmte Potential für das chirale Feld  $\sigma$  (das  $\vec{\pi}$ -Feld wurde in den Anfangsbedingungen zu Null gesetzt) für verschiedene Zeiten bei einem Anfangsradius von  $R = 5$  fm. Für die Bestimmung des dynamischen Potentials wurde zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die chiralen Felder bestimmt. Hieraus erhält man über den Gleichung (4.2) das Potential, in welchem sich die chiralen Felder bewegen.

Abbildung 4.2 zeigt das aus den dynamischen Rechnungen bestimmte Potential (es wurde um den Ursprung über eine Kugel mit dem Radius 2 fm gemittelt) für

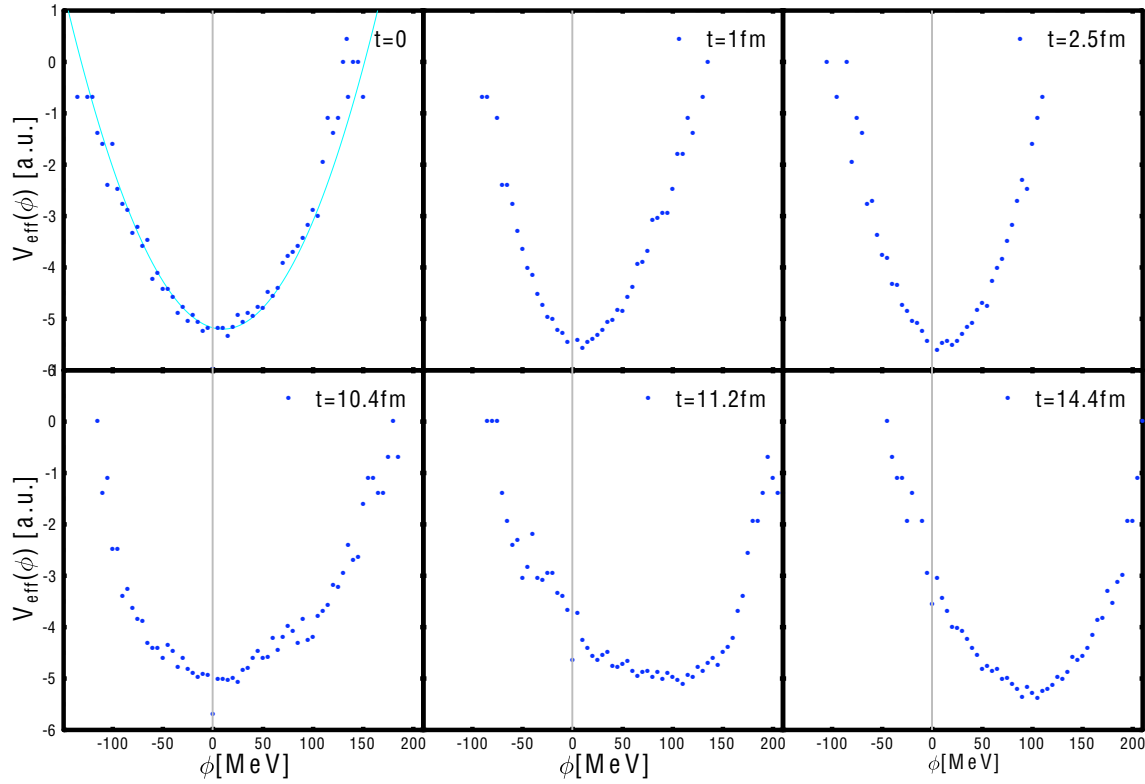


Abbildung 4.2: Das aus den dynamischen Rechnungen bestimmte effektive Potential für die chiralen Felder, dargestellt bei ausgewählten Zeiten.

einige ausgewählte Zeitschritte. Zur Zeit  $t = 0$  (obere Reihe, links) ist die Verteilung für das chirale Feld durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung (3.7) gegeben. Die Gaußverteilung mit der Breite  $v/2$  ist in Hellblau dargestellt, die aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung gewonnenen Punkte sind mit Dunkelblau dargestellt. Die Verteilung ist zunächst symmetrisch um den Gleichgewichtswert  $\sigma_{\text{eq}}$  der Anfangsbedingung - und nicht um  $\sigma = 0$ , da die Quarks auch in der chiral restaurierten Phase durch die explizite Symmetriebrechung eine kleine Masse besitzen. Nach 1 fm hat sich das Potential leicht verändert (obere Reihe, mitte), ist aber immer noch ungefähr um den Wert  $\sigma_{\text{eq}}$  symmetrisch. Auch weitere 1.5 fm später (obere Reihe, rechts) sieht das Potential noch sehr ähnlich aus - die hydrodynamische Expansion ist noch nicht weit genug fortgeschritten, um auch im Inneren eine Veränderung des effektiven Potentials zu bewirken. Das bedeutet, daß die Form des Potentials bei  $t = 1$  fm und  $t = 1.5$  fm ist nicht mehr durch die anfängliche Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben und die Fluktuationen des chiralen Feldes hatten ausreichend Zeit

sich dem tatsächlich vorhandenen, dynamisch erzeugten Potential anzupassen.

Zur Zeit  $t = 10.4$  fm (untere Reihe, links) hat die hydrodynamische Expansion das Zentrum der Kugel bereits erreicht, und das Potential zeigt eine deutlich breitere Form, sein Minimum zeigt jedoch, daß sich das System im Zentrum der Kugel immer noch vorwiegend in der chiral restaurierten Phase befindet. Die Breite der Verteilung läßt vermuten, daß sich das System in der Nähe des kritischen Punktes befindet. Etwas später bereits, bei  $t = 11.2$  fm (untere Reihe, mitte), hat sich das Minimum des Potentials bereits zum Vakuum Erwartungswert  $f_\pi = 93$  MeV bewegt und besitzt immernoch eine recht breite Form. Zur Zeit  $t = 14.4$  fm schließlich wird das Potential wieder enger, das System entfernt sich vom kritischen Punkt. Große Teile des Systems befinden sich jetzt in der chiral gebrochenen Phase.

Um nun die Zeitentwicklung der Korrelationslänge zu untersuchen, muß zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die chiralen Felder - für jeden einzelnen Zeitschritt und über die verschiedenen Feldkonfigurationen gemittelt - bestimmt werden, um dann über Gleichung (4.2) die effektive Wirkung zu erhalten. Allerdings läßt sich aus den diskreten Werten für die effektive Wirkung die Krümmung am absoluten Minimum nicht direkt bestimmen. In jedem Zeitschritt muß die effektive Wirkung zunächst bestimmt werden und anschließend mit den Polynom in Gleichung (4.3) approximiert werden. Daraus lassen sich zum einen  $\phi_0$  bestimmen und zum anderen ergibt sich die Korrelationslänge dann aus dem Koeffizienten  $a_2$ .

Abbildung 4.3 zeigt die zeitliche Entwicklung der aus den dynamischen Rechnungen extrahierten Korrelationslänge  $\xi$  für unterschiedliche Systemgrößen. Zunächst sollte der Vergleich zwischen der Form des Potentials für den oben diskutierten Fall für  $R = 5$  fm kurz gezogen werden. Bis zur Zeit  $t \approx 6$  fm verändert sich die Korrelationslänge für diesen Fall nicht wesentlich. Danach ist ein Ansteigen der Korrelationslänge zu erkennen, das Maximum liegt bei  $t \approx 8$  fm - dies entspricht in etwa der breiten Form des Potentials in Abbildung 4.2 (untere Reihe, links). Der zeitliche Verlauf der Korrelationslänge zeigt dann ein langsames Absinken bis hin zu einer relativ kleinen Korrelationslänge am Ende der Evolution. Dies spiegelt sich in der Form des Potentials bei  $t = 14.4$  fm (untere Reihe, rechts) wieder.

Nachdem die zeitliche Entwicklung der Korrelationslänge für nur eine der gewählten Anfangsbedingungen diskutiert wurde, soll jetzt der Vergleich zwischen den verschiedenen Anfangsbedingungen gezogen werden. Diese sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Zunächst sei bemerkt, daß für alle untersuchten Systemgrößen die Korrelationslänge *endlich* bleibt. Für das kleinste System mit  $R = 1$  fm bleibt die Korrelationslänge  $\xi(t)$  annähernd konstant und gleich dem anfänglichen Wert  $\xi_0 = \xi(t = 0)$

für alle Zeiten  $t$ .

Für größere  $R$  weist  $\xi(t)$  ein Maximum bei mittleren Zeiten auf und besitzt dort ungefähr einen Wert von  $2\xi_0$ . Der Wert des Maximums scheint in Abhängigkeit von  $R$  nur langsam anzuwachsen sobald  $R \geq 3$  fm. Diese Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit den Resultaten in [66]. Hier wurden unendlich große Systeme untersucht aber mit endlichen Zeitskalen und abgeschätzt, daß  $\xi$  Werte von  $2 - 3\xi_0$  nicht überschreiten kann und außerdem der Wert für  $\xi$  nur langsam mit der Kühlrate absinkt.

Diese Ergebnisse deuten darauf hin, daß experimentelle Event-by-Event Obser-

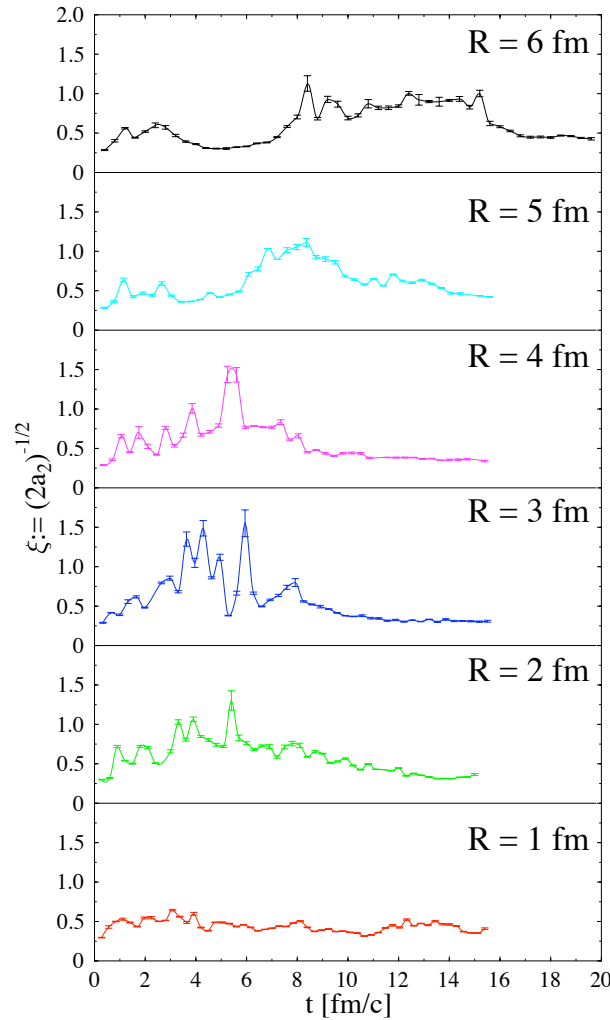


Abbildung 4.3: Zeitentwicklung der Korrelationslänge  $\xi$  für ein endliches und expandierendes System für unterschiedliche anfängliche Radien  $R$ .

vablen kein ausreichend kritisches Verhalten aufweisen dürften, um Rückschlüsse auf den kritischen Punkt zuzulassen. Selbst dann nicht, wenn das System genau durch den kritischen Punkt läuft und nicht nur in der Nähe des kritischen Punktes den Übergang zur kühleren Phase durchläuft. Allerdings könnten sich Auswirkungen der Form des effektiven Potentials in anderen Observablen zeigen. Darum wir es im Folgenden Kapitel gehen.





# DICHTEINHOMOGENITÄTEN

Ein weiterer interessanter Aspekt der Physik von Phasenübergängen in stark wechselwirkender Materie ist die Homogenität bzw. Inhomogenität der expandierenden Materie. Für gewöhnlich sind die Oberflächen auf denen Teilchen thermisch oder chemisch entkoppeln nicht homogen. Denn zum einen können sich schon vor dem Entkoppeln Inhomogenitäten im System bilden. Zum anderen befindet sich ein System kurz vor dem Entkoppeln nicht mehr im Gleichgewicht und somit kann auch die Entkopplungsfläche eines zuvor homogenen Systems inhomogen werden.

Dieser Umstand wird zum Beispiel durch die Daten der WMAP Kollaboration für die Fluktuationen (oder Inhomogenitäten) in der kosmischen Hintergrundstrahlung deutlich [67, 68]. Die Hintergrundstrahlung gibt über die Materieverteilung im frühen Universum (etwa 300 000 Jahre nach dem Urknall) Auskunft. Aus den Temperaturfluktuationen (siehe Abbildung 5.1, entnommen aus [67]) und deren Multipolentwicklung lassen sich kosmologische Parameter wie zum Beispiel die Baryonendichte im frühen Universum bestimmen.

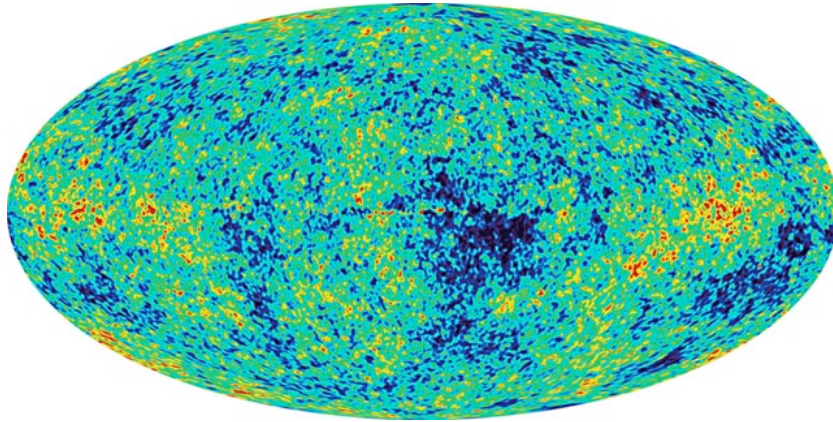


Abbildung 5.1: Temperaturfluktuationen im kosmischen Mikrowellenhintergrund, die Temperaturskala der Fluktuationen reicht von  $-200$  bis  $200 \mu K$ .

Diese Idee kann man nun auf die Physik von Kern-Kern-Kollisionen übertragen, um Hinweise auf den QCD Phasenübergang zu finden. Insbesondere soll die

Entstehung von Dichteinhomogenitäten bei endlichen Baryonendichten in Nichtgleichgewichtsübergängen untersucht werden. Im nächsten Abschnitt wird zunächst diskutiert werden, was man unter Dichteinhomogenitäten versteht und wodurch sie verursacht werden können. Danach werden die Anfangsbedingungen für die numerischen Rechnungen diskutiert, bevor im darauf folgenden Abschnitt die Ergebnisse vorgestellt und mögliche Observablen diskutiert werden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in [69] veröffentlicht.

## 5.1 Begriffsbildung Dichteinhomogenitäten

Die grundlegende Idee besteht darin, daß ein Phasenübergang seine Spuren in der Energie- und Baryonendichteverteilung zurücklassen könnte. Für das Auftreten von inhomogenen Dichteverteilungen in Kern-Kern-Stößen gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Ursachen.

1) Zum einen können Inhomogenitäten zu Beginn einer Kollision entstehen, da die Zahl an der Kollision teilnehmenden Teilchen und die Anzahl der stattfindenden Kollisionen fluktuiert. Diese Fluktuationen resultieren dann in einer nicht homogenen Deposition von Energie- und Baryonendichte bei Mitrapidität. Zum Beispiel erhält man mit einem Eventgenerator wie UrQMD [70] Vorhersagen für die Inhomogenität in der Energiedichte in der Größenordnung  $\Delta e \sim 1 \text{ GeV/fm}^3$  für Blei-Blei Kollisionen bei hohen SPS Energien ( $\sqrt{s} \simeq 17A \text{ GeV}$ ). Diese Inhomogenitäten entstehen durch Fluktuationen bei den Teilchenkollisionen mit geringem Impulsübertrag [71]. Für RHIC Energien ( $\sqrt{s} \simeq 100 - 200A \text{ GeV}$ ) könnte  $\Delta e$  durch so genannte Minijet Beiträge eine Größenordnung größer sein [72]. In [72] wird außerdem diskutiert, wie sich diese anfänglichen Inhomogenitäten im Rahmen eines hydrodynamischen Modells entwickeln. Die Autoren stellen fest, daß selbst starke anfängliche Störungen durch die hydrodynamische Expansion ausgewaschen werden, und bis zum Zeitpunkt des Ausfrierens im wesentlichen verschwunden sind. Qualitativ kann dies durch die folgende Argumentation verstanden werden: Der Radius  $L \simeq 1 \text{ fm}$  einer heißen Region wächst linear mit der Zeit, während deren Dichte invers proportional zum Volumen ist und damit in drei Dimensionen  $\Delta \rho \sim 1/t^3$ . Man geht nun davon aus, daß die Dauer der hydrodynamischen Expansion mindestens in der Größenordnung des Radius zweier kollidierender Kerne liegt [73, 2, 33], also  $\sim 5L$ . Daher sollte die Anfängliche Dichtekonzentration am Ende um einen Faktor 100 verdünnt sein. Das bedeutet, daß die anfänglich sehr starken Fluktuationen nur Spuren im Prozentbereich hinterlassen würden. Weitere Studien zu anfänglichen

Dichteinhomogenitäten lassen sich in den Referenzen [74, 75, 76] finden.

2) Zum anderen können Inhomogenitäten durch Nichtgleichgewichtsübergänge von chiral symmetrischer zu chiral unsymmetrischer Materie entstehen. Man geht im allgemeinen davon aus, daß der Übergang zwischen den beiden Phasen in Kern-Kern Kollisionen sehr schnell von statten geht. Damit ist es recht wahrscheinlich, daß die langwelligen Moden des chiralen Feldes aus dem Gleichgewicht geraten. Dies wiederum sollte sich dann in einer ungleichmäßigen Verteilung der Energie- und Baryonendichte auf der Ausfrierfläche zeigen. Darüber hinaus findet das Ausfrieren der Teilchen in einer Kern-Kern-Kollision kurz nach dem Übergang in die chiral gebrochene Phase statt. Und damit sollte die Überlebenswahrscheinlichkeit dieser relativ spät auftretenden Störungen ausreichend hoch sein, um nachweisbare Spuren zurück zulassen. Zudem sei bemerkt, daß in [77] eine kollisionsfreie Vlasov-Gleichung verwendet wurde, um die Zeitentwicklung von kleinen anfänglichen Dichtefluktuationen innerhalb eines NJL-Modells [18, 19] zu untersuchen. In [77] wurde eine Vergrößerung der Fluktuationen beobachtet, obwohl hier der Erwartungswert für die Chiralen Felder auf den Gleichgewichtswert festgelegt ist. In der Chiralen Hydrodynamik ist dies nicht der Fall und die Nichtgleichgewichtsdynamik erlaubt es, die Struktur des effektiven Potentials für die Felder zu berücksichtigen. Innerhalb dieses Ansatzes sollen Inhomogenitäten in der Baryonen- und Energiedichte untersucht werden deren Ursache in den anfänglichen Fluktuationen der chiralen Felder liegt.

## 5.2 Anfangsbedingungen und numerische Parameter

Zunächst sollen wieder die Anfangsbedingungen für die numerischen Berechnungen diskutiert werden. Ziel ist es, die qualitative Auswirkung von Nichtgleichgewichtsübergängen auf Inhomogenitäten in der Energie- und Baryonendichte zu untersuchen. Dazu wird die in Abschnitt 2.5 diskutierte Zustandsgleichung bei endlichen Baryonendichten ( $\mu \neq 0$ ) und einer Kopplungskonstanten von  $g = 3.3$  verwendet. Für diesen Fall besitzt das Phasendiagramm die in Abbildung 2.1 gezeigte Struktur: bei endlichen Dichten eine Linie von Phasenübergängen erster Ordnung, die für kleiner werdende Baryonendichten am kritischen Punkt in eine Crossover Linie übergeht.

Um nun den Einfluß von unterschiedlichen Nichtgleichgewichtsübergängen zu untersuchen, werden im folgenden zwei Sätze von Anfangsbedingungen verwendet:

**I)** Zum einen werden Anfangsbedingungen gewählt, bei denen die anfängliche

Energiedichte  $e_{\text{eq}} = 2.8e_0$  gleich ist, aber die anfängliche Baryondichte unterschiedliche Werte  $\rho_{\text{eq}} = (0, 0.6, 1.6, 2.1, 2.4, 2.8)\rho_0$  besitzt. Für kleine Baryondichten wird die Expansion des System durch einen Crossover laufen, während für höhere Baryondichten ein Phasenübergang erster Ordnung stattfindet.

**II)** Zum anderen werden Anfangsbedingungen gewählt, bei denen die anfängliche Baryondichte  $\rho_{\text{eq}} = 1.7\rho_0$  gleich ist, aber die anfängliche Energiedichte unterschiedliche Werte  $e_{\text{eq}} = (1.4, 1.9, 2.9)e_0$  besitzt. Für große Energiedichten wird das System durch einen Crossover laufen, während für kleine Energiedichten ein Phasenübergang erster Ordnung stattfindet.

Hierbei sind  $e_0 = 146 \text{ MeV/fm}^3$  und  $\rho_0 = 0.16/\text{fm}^3$  die Grundzustands Energie- bzw. Baryondichte. In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurde die Stärke und Art des Übergangs zwischen den beiden Phasen durch die Kopplungskonstante  $g$  gewählt. Bei den Rechnungen in diesem Kapitel wird die Stärke und Art des Übergangs durch die Anfangsbedingung bestimmt.

Das System wird sich entsprechend der Bewegungsgleichungen für Feld und Flüssigkeit entwickeln und aufgrund der Fluktuationen die Phasengrenze an benachbarten, aber dennoch unterschiedlichen Punkten durchqueren. Im großen und ganzen läßt sich aber die Art und Stärke des Übergangs durch eine gemittelte Trajektorie im Phasendiagramm beschreiben.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird eine heiße und dichte Kugel mit dem Radius  $R = 5 \text{ fm}$  initialisiert. Die Quarks besitzen anfänglich keine kollektive Geschwindigkeit, d.h.

$$\vec{v}(t = 0) = 0 \quad . \quad (5.1)$$

Die Verteilung der Energie- und Baryondichte sei jetzt auch durch eine Woods-Saxon-artige Verteilung

$$\begin{aligned} e(t = 0, \vec{x}) &= \frac{e_{\text{eq}}}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad , \\ \rho(t = 0, \vec{x}) &= \frac{\rho_{\text{eq}}}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

gegeben um mögliche Randeffekte noch weiter auszuschließen - es zeigt sich aber, daß der Unterschied zu einem abrupten Übergang, wie er in den vorangegangenen Kapiteln verwendet wurde, gering ist. Die Oberflächendicke wird hier wieder zu  $a = 0.3 \text{ fm}$  gewählt.

Für die chiralen Felder wird ebenfalls wieder eine Woods-Saxon-artige Verteilung gewählt

$$\sigma(t = 0, \vec{x}) = \delta\sigma(\vec{x}) + f_\pi + \frac{\sigma_{\text{eq}} - f_\pi}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
&= \delta\sigma(r, \varphi, \theta) + \langle\sigma\rangle(r) \\
\vec{\pi}(t=0, \vec{x}) &= \delta\vec{\pi} \ ,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei  $\sigma_{\text{eq}} \approx 0$  der Erwartungswert des  $\sigma$ -Feldes bei  $e_{\text{eq}}$  und  $\rho_{\text{eq}}$  ist. Damit besitzt das chirale Feld im Inneren der Kugel, wo die Quarks eine hohe Dichten besitzen, einen sehr kleinen Wert. Am Rand der Kugel steigt der Wert des chiralen Feldes rasch auf den Vakuumerwartungswert  $f_\pi$  außerhalb der Kugel an, wo die Quarks eine sehr geringe Dichte besitzen. Das System wird dann aufgrund der Druckdifferenz beginnen, hydrodynamisch zu expandieren.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Fluktuationen sind wie in (3.7) durch eine Gaußverteilung gegeben:

$$P[\delta\phi_a] \propto \exp\left(-\delta\phi_a^2/2\langle\delta\phi_a^2\rangle\right) \ , \tag{5.4}$$

wobei die Breite der Verteilung wieder den Wert  $\sqrt{\langle\delta\sigma^2\rangle} = v/3$  für das  $\sigma$ -Feld besitzt, während das  $\vec{\pi}$ -Feld und seine Fluktuationen für  $t=0$  und damit auch für alle Zeiten  $t>0$  verschwinden. Wie bereits in den vorangegangenen Untersuchungen wird auch hier über verschiedene Anfangskonfigurationen des chiralen Feldes gemittelt. Für alle oben genannten Anfangsbedingungen werden mehrere Durchläufe mit jeweils unterschiedlichen Anfangsfluktuationen durchgeführt.

### 5.3 Ergebnisse: Inhomogenitäten in der zeitlichen Entwicklung von Energie- und Baryonendichte

Bevor die Inhomogenitäten von Energie- und Baryonendichte quantifiziert werden, zeigt Abbildung 5.2 die zeitliche Entwicklung der Baryonendichte entlang einer willkürlich gewählten Achse (hier in Richtung der  $x$ -Achse). Das System beginnt seine Expansion bei  $t=0$  ohne erkennbare Inhomogenitäten der Baryonendichte. Die anfänglichen Fluktuationen des chiralen Feldes wirken sich jedoch schnell auf die Baryonendichte aus. Während der Expansion entstehen deutlich sichtbare Inhomogenitäten an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten. Die räumliche Größe und Stärke der Inhomogenitäten ist deutlich stärker als beispielsweise beim kosmischen Mikrowellenhintergrund (Abbildung 5.1). Die entsprechende zeitliche Entwicklung der Energiedichte zeigt ein ähnliches Verhalten und ist daher nicht dargestellt. Bevor die hier dargestellten Inhomogenitäten quantifiziert werden, soll

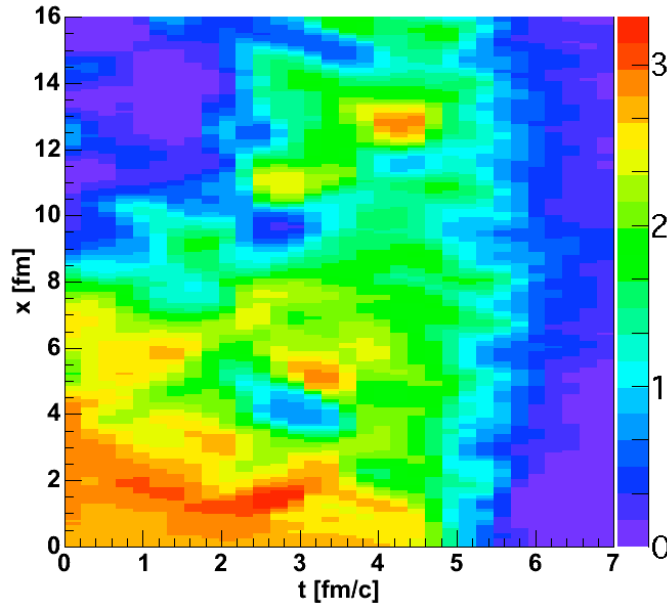


Abbildung 5.2: Zeitliche Entwicklung der Baryondichte in Richtung der  $x$ -Achse. Die Skala für die Baryondichte ist Einheiten der Grundzustandsbaryondichte  $\rho_0$  angegeben.

als nächstes erst untersucht werden, auf welchen Trajektorien im Phasendiagramm sich die verschiedenen betrachteten Systeme bewegen.

Abbildung 5.3 zeigt die gemittelte Trajektorie des Systems für die beiden verschiedenen Sätze von Anfangsbedingungen I und II. Die gemittelte Energiedichte  $\langle e \rangle$  ist gegeben durch

$$\langle e \rangle(t) = \frac{\int d^3x T_{\text{fluid}}^{00} e}{\int d^3x T_{\text{fluid}}^{00}}, \quad (5.5)$$

und analog ist die Baryondichte  $\langle \rho \rangle$  gegeben durch

$$\langle \rho \rangle = \frac{\int d^3x T_{\text{fluid}}^{00} \rho}{\int d^3x T_{\text{fluid}}^{00}}. \quad (5.6)$$

Die Mittelung erfolgt bei konstanter Laborsystem-Zeit  $t$ . Darüber hinaus wird über mehrere anfängliche Feldkonfigurationen gemittelt, die gemäß Gleichung (5.4) verteilt sind.

Man erkennt, daß das System für die Anfangsbedingungen mit  $\mu < \mu_E$  durch einen Crossover läuft. Für die übrigen Anfangsbedingungen verläuft die Trajektorie durch den grau gekennzeichneten Bereich der Phasenkoexistenz und das System durchläuft damit einen Phasenübergang erster Ordnung, dessen Stärke von den Anfangsbedingungen abhängt.

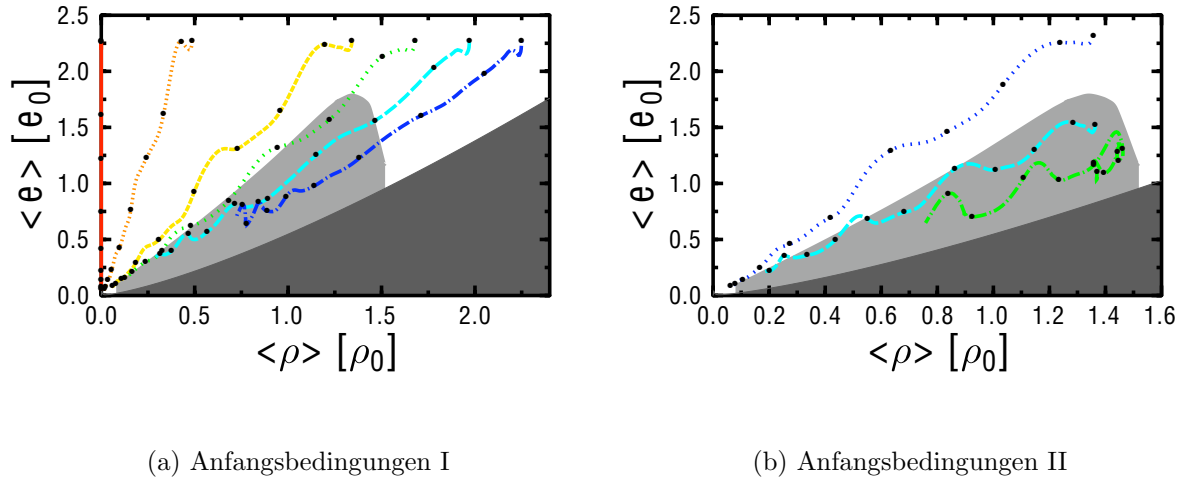


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung der gemittelten Energie- und Baryonendichte durch Crossover, schwache und starke Phasenübergänge erster Ordnung in Einheiten von  $\rho_0$  und  $e_0$ . Die Punkte bezeichnen Zeitabstände von  $\approx 1.5 \text{ fm}/c$ . Der Bereich der Phasenkoexistenz ist grau dargestellt und die thermodynamisch verbotene Region mit  $e < \mu_B \rho - p$  ist schwarz dargestellt.

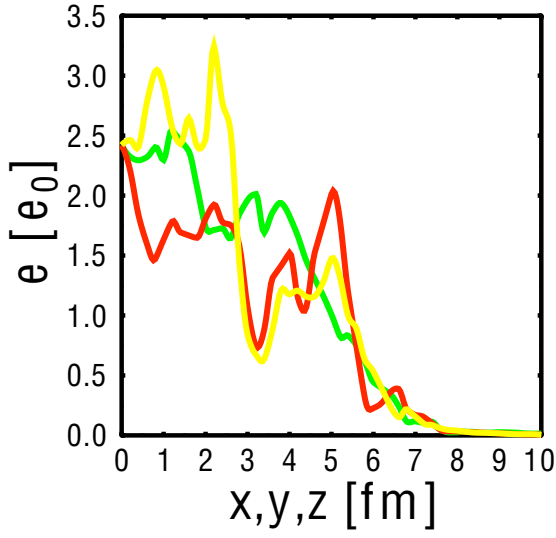
Das Ziel dieses Kapitels ist es zu untersuchen, wie die Stärke der durch die anfänglichen Fluktuationen des chiralen Feldes verursachten Dichteinhomogenitäten von der Anwesenheit eines Phasenübergangs oder Crossovers beeinflusst wird. Hierfür muß zunächst ein Maß für die Stärke der Inhomogenitäten festgelegt werden.

Die Bestimmung der Stärke der Inhomogenitäten  $\Delta e$  und  $\Delta \rho$  wird durch das folgende Verfahren bestimmt, dessen einzelne Schritte in Abbildung 5.4 dargestellt sind. Die Ausgangssituation ist in Abbildung 5.4(a) zu sehen, welche exemplarisch Profile für die Energiedichte  $e$  entlang ausgewählter Raumrichtungen (hier die Koordinatenachsen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung) zeigt. Das System hat zu diesem beliebig gewählten Zeitpunkt bereits Inhomogenitäten in der Energiedichte (und auch Baryonendichte) ausgebildet, die für alle Raumrichtungen unterschiedlich sind.

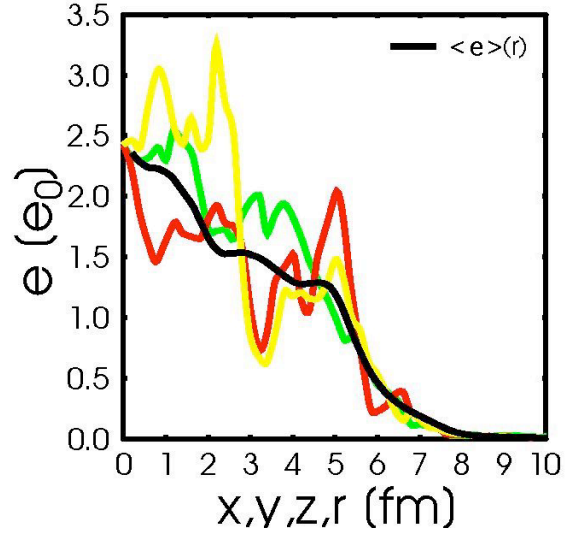
Zunächst wird nun das unter den Fluktuationen liegende gemittelte Dichteprofil bestimmt. Hierfür läßt sich die Kugelsymmetrie des Systems ausnutzen und es wird über Kugeloberflächen mit endlicher Dicke und Radius  $r$  gemittelt, so daß sich das gemittelte Dichteprofil  $\langle e \rangle(t, r)$  durch

$$\langle e \rangle(t, r) = \mathcal{N}^{-1} \int d^3x \Theta(r + \Delta r - |\vec{x}|) \Theta(|\vec{x}| - r) e(t, \vec{x}) \quad (5.7)$$

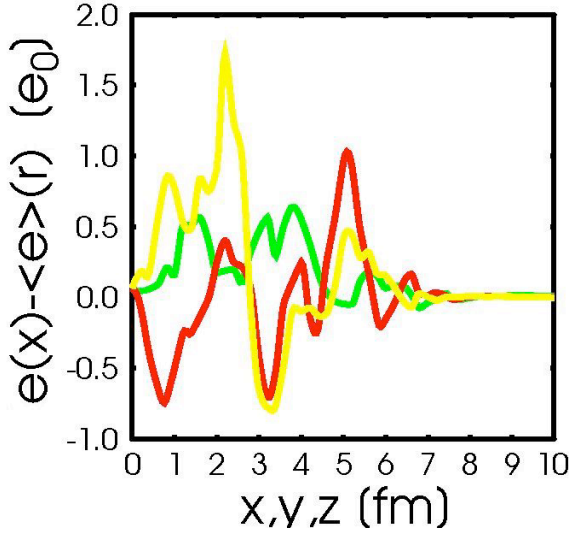
bestimmt, mit  $\mathcal{N} = 4\pi(\Delta r^3 + 3\Delta r^2 r + \Delta r r^2)$ . Die Mittelung erfolgt hierbei bei



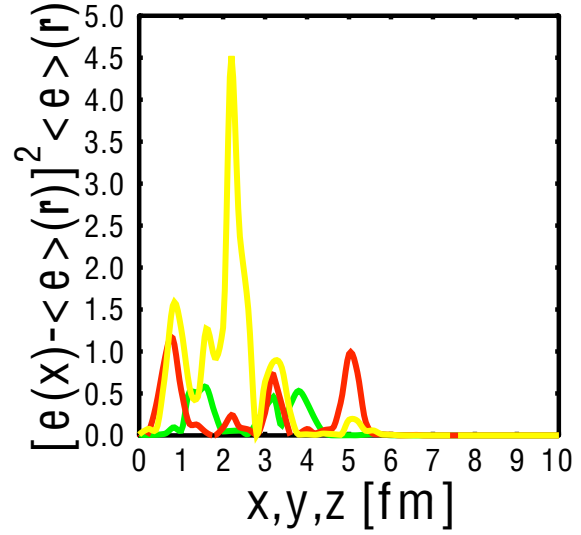
(a) Energiedichte  $e$  entlang der Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$



(b)  $\langle e \rangle(t, r)$  (schwarze Linie)



(c) Subtraktion von  $\langle e \rangle(t, r)$



(d) Gewichtung mit  $\langle e \rangle(t, r)$

Abbildung 5.4: Veranschaulichung der einzelnen Schritte zur Bestimmung der Stärke der Inhomogenitäten

konstanter Zeit  $t$  und für jede Feldkonfiguration separat. Dieser Schritt ist in Abbildung 5.4(b) zu sehen. Die Bestimmung von  $\langle e \rangle(t, r)$  ist notwendig, da die Stärke von



Fluktuationen immer um den Mittelwert der Fluktuationen gemessen wird. Da das hier vorliegende System eine Kugelsymmetrie besitzt, ist es von Vorteil, diese auszunutzen und den Mittelwert wie beschrieben zu bestimmen. Abbildung 5.4(c) zeigt die reinen Inhomogenitäten, d.h. der Mittelwert  $\langle e \rangle(t, r)$  wurde jeweils abgezogen.

Der letzte Schritt zur Bestimmung von  $\Delta e$  und  $\Delta \rho$  besteht in der Gewichtung der Inhomogenitäten mit  $\langle e \rangle(t, r)$ , da die dichten Regionen stärker gewichtet werden sollen (siehe Abbildung 5.4(d)). Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wird die Inhomogenität der Energiedichte  $\Delta e$  bestimmt durch

$$\Delta e^2(t) = \frac{\int d^3x [\rho(t, \vec{x}) - \langle e \rangle(t, r)]^2 \cdot \langle e \rangle(t, r)}{\int d^3x \langle e \rangle(t, r)} . \quad (5.8)$$

Analog wird die Stärke der Dichteinhomogenität für die Baryondichte durch

$$\Delta \rho^2(t) = \frac{\int d^3x [\rho(t, \vec{x}) - \langle \rho \rangle(t, r)]^2 \cdot \langle e \rangle(t, r)}{\int d^3x \langle e \rangle(t, r)} . \quad (5.9)$$

bestimmt, wobei

$$\langle \rho \rangle(t, r) = \mathcal{N}^{-1} \int d^3x \Theta(r + \Delta r - |\vec{x}|) \Theta(|\vec{x}| - r) \rho(t, \vec{x}) . \quad (5.10)$$

Die Zeitentwicklung der Inhomogenitäten der Baryondichte für die Anfangsbedingungen I ist in Abbildung 5.5 gezeigt. Da zur Zeit  $t = 0$  lediglich das chirale s Feld Fluktuationen aufweist, sind am Anfang  $\Delta e = \Delta \rho = 0$ . Das heißt alle Inhomogenitäten die entstehen, gehen auf die anfänglichen Fluktuationen des chiralen Feldes und die Nichtgleichgewichtsbeschreibung zurück. Durch die Expansion des Systems wird für wachsendes  $t$  der Wert für  $\langle \rho \rangle$  kleiner. Gleichzeitig wirken sich aber recht schnell die anfänglichen Fluktuationen des chiralen Feldes auf die kollektive Bewegung der Quarks aus und dies führt zu Dichteinhomogenitäten in der Quarkflüssigkeit. Es läßt sich erkennen, daß die Inhomogenitäten der Baryondichte durch die dynamische Entwicklung beeinflußt werden.

Für große anfängliche Baryondichten läuft die Expansion des Systems durch einen Bereich eines Phasenübergangs erster Ordnung. In diesem Bereich besitzt das effektive Potential zwei Minima, die durch ein Maximum getrennt sind. Somit kann das chirale Feld in einigen Bereichen in einem Minimum sitzen bis der spinodale Punkt (an dem das Minimum schließlich verschwindet) erreicht ist. Dieser Effekt nimmt mit der Stärke des Phasenübergangs zu. Das führt dazu, daß die Dichteinhomogenitäten nur dann ausgewaschen werden können, wenn eines der Minima verschwindet und das Feld somit in das Minimum der gebrochenen Phase gelangen

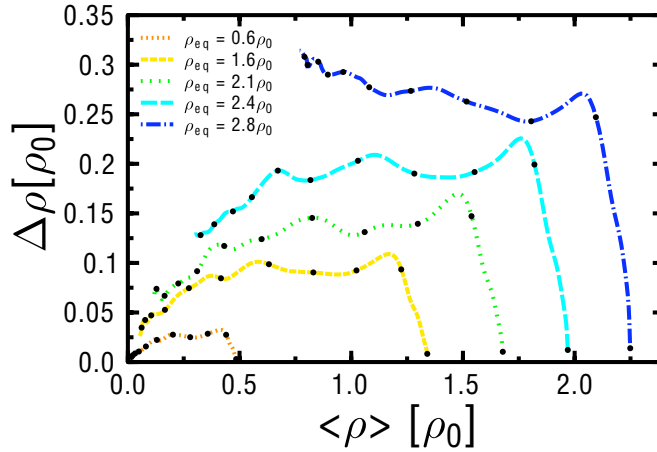


Abbildung 5.5: Inhomogenität der Baryondichte für die Anfangsbedingungen I für Crossover (enge Punkte, kurze Striche), schwache (weite Punkte, lange Striche) und starke (Strich-Punkt) Phasenübergänge erster Ordnung als Funktion der mittleren Baryondichte. Die Punkte bezeichnen Zeitabstände von  $\approx 1.5$  fm/c.

kann. Wenn der Phasenübergang nahe genug an der Ausfrierfläche stattfindet, dann gibt es eine gute Wahrscheinlichkeit, daß die Inhomogenitäten ausreichend lange überleben, um ein meßbares Signal zu hinterlassen. Selbst für einen Crossover wäre es möglich, daß sich solche Inhomogenitäten im Endzustand finden lassen - falls das System ausfriert kurz nachdem das effektive Potential am flachsten war.

Aus den vorliegenden Untersuchungen für die Anfangsbedingungen I (gleiche anfängliche Energiedichte) geht noch nicht hervor, in welchem Ausmaß die Stärke der Inhomogenitäten in der Baryondichte von der höheren anfänglichen Baryondichte im Fall der Phasenübergänge erster Ordnung abhängig ist. Hierfür bieten die Anfangsbedingungen II eine gute Referenzrechnung. Abbildung 5.6 zeigt die Ergebnisse für die Anfangsbedingungen II für verschiedene anfängliche Energiedichten  $e_{eq}$  bei gleicher anfänglicher Baryondichte  $\rho_{eq} = 1.7\rho_0$ . Auch hier erkennt man deutlich, daß die Stärke der Inhomogenitäten  $\Delta\rho$  für einen Phasenübergang erster Ordnung ( $e_{eq} = 1.4e_0$ ) größer ist als für einen Crossover ( $e_{eq} = 2.9e_0$ ).

Insgesamt zeigen die Ergebnisse für die Inhomogenitäten der Baryondichte, daß diese von der Größenordnung  $\Delta\rho/\rho_0 \sim 0.1 - 1$  sind. Darüber hinaus zeigt sich, daß die Stärke der Inhomogenitäten deutlich von der Form des effektiven Potentials abhängt: Die Auswirkungen sind stärker für einen Phasenübergang erster Ordnung und schwächer für einen Crossover.

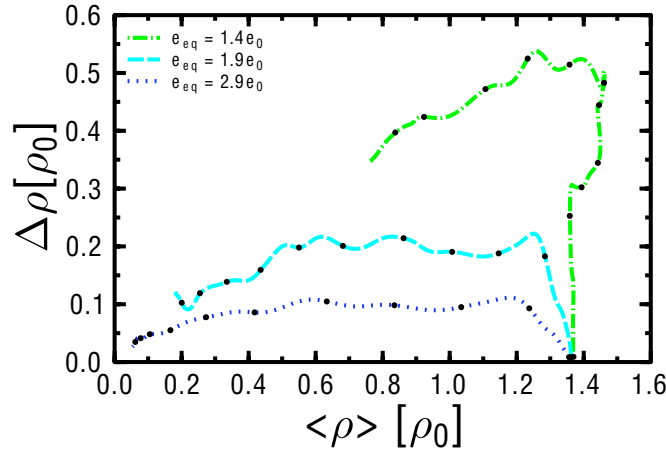
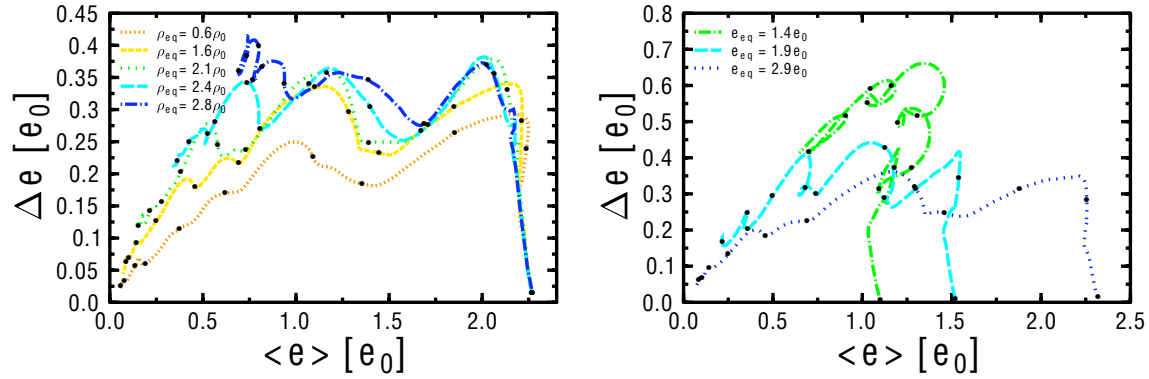


Abbildung 5.6: Inhomogenität der Baryondichte für die Anfangsbedingungen II für einen Crossover (Punkte), einen schwachen (Striche) und einen starken (Strich-Punkt) Phasenübergang erster Ordnung als Funktion der mittleren Baryondichte. Die Punkte bezeichnen Zeitabstände von  $\approx 1.5$  fm/c.

Anders als die Ergebnisse für die Baryondichte zeigen die Ergebnisse für die Inhomogenitäten der Energiedichte keine besonders deutliche Abhängigkeit von der Energiedichte. Abbildung 5.7 zeigt die zeitliche Entwicklung von  $\Delta e$  für beide Anfangsbedingungen. Im Fall der Anfangsbedingung I (Abbildung 5.7(a)), also bei gleicher anfänglicher Energiedichte, zeigt sich nur eine sehr schwache Abhängigkeit von den verschiedenen anfänglichen Baryondichte. Zwar läßt sich erkennen, daß die Inhomogenitäten mit der Stärke des Überganges zunehmen, aber der Unterschied ist nicht groß genug, um auf Observablen einen nennenswerten Einfluß haben zu können. Für die Anfangsbedingungen II (Abbildung 5.7(b)) sind die Unterschiede ebenfalls nicht deutlich genug.

Welche experimentellen Signaturen können sich aus den von der Art des Übergang abhängigen Inhomogenitäten der Baryondichte ergeben? Zum Beispiel hängt die Nukleosynthese nach dem Urknall von Fluktuationen des Baryon zu Photon Verhältnisses ab [78, 79, 80]. In Analogie dazu könnte man untersuchen, ob die relativen Hadronmultiplizitäten in Kern-Kern Kollisionen Veränderungen aufgrund der Dichteinhomogenitäten zeigen. Denn die Dichten der verschiedenen Teilchenspezies hängen nichtlinear von der Energie- und Baryondichte ab und damit mitteln sich die Dichteinhomogenitäten nicht heraus.

Insgesamt ist das hier vorliegende Modell aber zu schematisch um für quanti-



(a) Inhomogenität der Energiedichte für die Anfangsbedingungen I für Crossover (enge Punkte, kurze Striche), schwache (weite Punkte, lange Striche) und starke (Strich-Punkt) Phasenübergänge erster Ordnung als Funktion der mittleren Energiedichte. Die Punkte bezeichnen Zeitabstände von  $\approx 1.5$  fm/c.

(b) Inhomogenität der Energiedichte für die Anfangsbedingungen II für einen Crossover (Punkte), einen schwachen (Striche) und einen starken (Strich-Punkt) Phasenübergang erster Ordnung als Funktion der mittleren Energiedichte. Die Punkte bezeichnen Zeitabstände von  $\approx 1.5$  fm/c.

Abbildung 5.7: Inhomogenität der Energiedichte für die Anfangsbedingungen I und II

tative Vorhersagen von Teilchenproduktionen verwendet werden zu können. Allerdings könnten die experimentellen Daten in Hinblick auf inhomogene Ausfrierflächen untersucht werden. Die gängigen Fits von Teilchenmultiplizitäten mit thermischen Modellen gehen von einer homogenen Ausfrierfläche aus und hängen von der Temperatur  $T$  und dem baryochemischen Potential  $\mu_B$  ab [81]. Um nun innerhalb dieser thermischen Modelle Inhomogenitäten untersuchen zu können, ist es möglich  $T$  und  $\mu_B$  als Erwartungswert von Gaußverteilung mit der bestimmten Breite  $\Delta T$  bzw.  $\Delta\mu_B$  anzunehmen. Die mittlere Dichte einer bestimmten Teilchenspezies  $i \in \{\pi, K, N, \dots\}$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{\rho_i}(\overline{T}, \overline{\mu_B}, \Delta T, \Delta\mu_B) &= \int_0^\infty dT P(T; \overline{T}, \Delta T) \\ &\times \int_{-\infty}^\infty d\mu_B P(\mu_B; \overline{\mu_B}, \Delta\mu_B) \rho_i(T, \mu_B), \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei  $\rho_i(T, \mu_B)$  die eigentliche lokale Dichte der Teilchenspezies  $i$  auf der Ausfrierfläche ist. Hierbei ist

$$P(x; \bar{x}, \Delta x) \sim \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \Delta x^2} \right\} \quad (5.12)$$

die Verteilung der Temperatur und des chemischen Potentials. Damit gilt für die Baryondichte

$$\bar{\rho}_i(\bar{T}, \bar{\mu}_B, \Delta T, \Delta \mu_B) \neq \rho_i(\bar{T}, \bar{\mu}_B) \quad (5.13)$$

falls  $\Delta T, \Delta \mu_B \neq 0$ . Der Hauptbeitrag zu den Integralen in Gleichung 5.12 kommt nicht von  $\bar{T}$  und  $\bar{\mu}_B$ , sondern von dem stationären Punkt des Integranden. Für seltene und schwere Teilchen (für die quantenstatistische und relativistische Effekte vernachlässigt werden können), ergibt sich ein exponentieller Anstieg der Dichte mit  $(\Delta \mu_B / \bar{\mu}_B)^2$  und  $(\Delta T / \bar{T})^2$ , siehe [82].

Ausgehend von den Ergebnissen dieses Kapitels würde man deutlich von Null verschiedene Werte für  $\Delta T$  und  $\Delta \mu_B$  erwarten, wenn das Ausfrieren nahe des Phasenübergangs stattfände. Dagegen würde man deutlich kleinere Werte erwarten, wenn das System durch einen Crossover gehen würde. Vor diesem Hintergrund könnten die Hadronmultiplizitäten am RHIC und SPS innerhalb eines solchen Modells untersucht werden um Hinweise auf Inhomogenitäten und deren mögliche Abhängigkeit von der Kollisionsenergie zu finden [83, 84]. Darüber hinaus wird in  $Au - Au$ -Kollisionen am AGS relative kalte und baryondichte Materie erzeugt [85, 86, 38, 87] und es könnte möglich sein, hier den Phasenübergang erster Ordnung zu untersuchen [88, 89]. Andere Observablen sollten auch eine Abhängigkeit von den Dichteinhomogenitäten zeigen, wie zum Beispiel Hanbury-Brown-Twiss-Korrelationen [75] für Pionen.



# ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

*He looked at me and said, "Do you understand?" I said no, I didn't.  
"Good beginning" he said. "You'll be even better when you begin to  
understand what you do not understand."*

J. Michael Straczynski (Babylon 5, 1994)

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Nichtgleichgewichtseffekte des chiralen Phasenübergangs von stark wechselwirkender Materie untersucht. Zunächst wurde ein Modell vorgestellt, welches die Nichtgleichgewichtsbeschreibung auf einem effektiven Niveau erlaubt. Bei den anschließenden qualitativen Studien standen verschiedene Aspekte im Vordergrund: Der Einfluß der Nichtgleichgewichtsbeschreibung auf kollektive Phänomene, auf die Korrelationslänge des chiralen Ordnungsparameters und auf die Bildung von Inhomogenitäten in der Energie- und Baryonendichte.

In Kapitel 2 wurden die einzelnen Grundlagen für die Betrachtungen dieser Arbeit gelegt. Zunächst wurde die Beschreibung von heißer und dichter Kernmaterie mit Hilfe der Hydrodynamik diskutiert und deren numerische Lösung kurz beschrieben. Anschließend wurde das lineare  $\sigma$ -Modell vorgestellt, welches die Wechselwirkung zwischen den Quarks auf einer effektiven Ebene beschreibt. Durch die Annahme eines (lokalen) thermodynamischen Gleichgewichts für die Quarks ist es möglich, diese durch hydrodynamische Gleichungen zu beschreiben. Gleichzeitig bilden die Quarks ein Wärmebad und das die chiralen Felder koppeln. Nimmt man noch die Mittlere-Feld-Näherung für die chiralen Felder hinzu, können die Quarkfreiheitsgrade ausintegriert werden. Damit erhält man das effektive Potential für die chiralen Felder in Anwesenheit des Wärmebades, aus dem sich die thermodynamischen Eigenschaften dieses kombinierten Modells bestimmen lassen. Es ergibt sich eine Phasenstruktur, die qualitativ mit den bisherigen Überlegungen und aktuellen Rechnungen auf dem Gitter übereinstimmt.

Im Gegensatz zu dem Wärmebad aus Quarks müssen die chiralen Felder nicht im Gleichgewicht sein, sondern können sich entsprechend der Bewegungsgleichungen in

dem gegebenen effektiven Potential entwickeln. Dadurch ist es möglich, Nichtgleichgewichtseffekte zu untersuchen. Das chirale Feld wirkt dabei als Ordnungsparameter für den chiralen Phasenübergang, welcher in dem Modell enthalten ist. Die zeitliche Entwicklung der Quarkflüssigkeit wird dabei von den chiralen Feldern über die effektive Quarkmasse beeinflusst. Die Quarks bilden ein Wärmebad für die chiralen Felder und haben damit wiederum einen Einfluß auf die zeitliche Entwicklung der chiralen Felder.

Durch die Nichtgleichgewichtsbeschreibung ist es außerdem möglich, daß der chirale Ordnungsparameter thermisch fluktuiert. Die dynamische Entwicklung und der Einfluß dieser Fluktuationen auf die zeitliche Entwicklung eines Systems aus stark wechselwirkender Materie wurden im Rahmen dieser Arbeit untersucht.

Zunächst wurde dazu in Kapitel 3 untersucht, wie sich die Nichtgleichgewichtsbeschreibung auf eine Kern-Kern-Kollision auswirken kann. Als erstes wurde die allgemeine zeitliche Entwicklung der Energiedichte und des chiralen Feldes untersucht, um so einen Eindruck über die Auswirkung des Nichtgleichgewichtes auf die Dynamik des Systems zu erhalten. Anschließend wurde die zeitliche Entwicklung der azimuthalen Impulsanisotropie in Anwesenheit eines Nichtgleichgewichtsüberganges betrachtet und verschiedene Phasenübergänge untersucht. Die Ergebnisse, die sich hierbei für die Impulsanisotropie ergeben haben, sind qualitativ mit den vorhandenen experimentellen Daten in Übereinstimmung.

Anschließend wurde in Kapitel 4 die Korrelationslänge in der Nähe des kritischen Punktes für die chiralen Felder untersucht. Im thermodynamischen Gleichgewicht würde man hier eine divergente Korrelationslänge erwarten. Für den Fall einer Kern-Kern-Kollision handelt es sich jedoch um ein endliches und expandierendes System. Damit kann die Korrelationslänge nur endliche Werte annehmen. Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Korrelationslänge in der Nähe des kritischen Punktes zwar größer wird aber nicht ausreichend groß, um einen deutlichen Einfluß auf Observablen zu haben.

Dennoch sollten die Fluktuationen des chiralen Ordnungsparameters zu messbaren Signalen führen. Daher wurde in Kapitel 5 untersucht, wie sich die Fluktuationen des Ordnungsparameters auf die Energie- und Baryonendichte auswirken und diese dadurch Inhomogenitäten aufweisen. Zunächst wurde ein Maß für die Stärke und Größe der Inhomogenitäten entwickelt. Die Ergebnisse für die Inhomogenitäten für die verschiedenen Anfangsbedingungen, welche gewählt wurden, zeigen eine deutliche Abhängigkeit von der Art des Phasenübergangs, der zugrundeliegt. Es zeigte sich, daß die Inhomogenitäten in der Baryonendichte in ihrer Größe zunehmen, je



stärker der Phasenübergang ist, durch den ein System geht. Es wurde abschließend diskutiert, wie diese verschieden starken Inhomogenitäten sich in einer Analyse der experimentellen Daten mit Hilfe eines erweiterten thermischen Modells bemerkbar machen.

Insgesamt bieten die verschiedenen in dieser Arbeit untersuchten Aspekte einen interessanten und wichtigen Einblick in die Auswirkungen eines Nichtgleichgewichtsphasenübergangs auf die Dynamik eines stark wechselwirkenden Systems. Die Untersuchungen in dieser Arbeit haben gezeigt, daß der Einfluß von Nichtgleichgewichtseffekten in Kern-Kern-Kollisionen eine wichtige Rolle spielen könnte.

Allerdings können die gewonnenen Aussagen nur auf einer qualitativen Ebene zur Erklärung von experimentellen Daten verwendet werden. Für die Zukunft ist es notwendig, ein Modell für die effektive Wechselwirkung zwischen den Quarks zu entwickeln, welches die gittereichtheoretischen Ergebnisse für das Phasendiagramm korrekt beschreibt. Erst dann können wirklich quantitative Vergleiche mit dem Experiment erfolgen. Aber auch auf der Seite der hydrodynamischen Beschreibung gibt es noch die Einschränkung auf ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht, mögliche dissipative Effekte werden nicht berücksichtigt.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit stellen in gewisser Weise nur einen Anfang dar und können in vielfältiger Weise fortgesetzt werden. Es gibt viele Aspekte, die in Kern-Kern-Kollisionen noch nicht verstanden sind. Ein guter Anfang.



# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. J. Jelitto; *Theoretische Physik 6: Thermodynamik und Statistik*; AULA-Verlag Wiesbaden (1989).
- [2] P. Huovinen; Hydrodynamical description of collective flow; *nucl-th/0305064* (2003)
- [3] D. H. Rischke; Fluid dynamics for relativistic nuclear collisions; *nucl-th/9809044* (1998)
- [4] A. Muronga; Second order dissipative fluid dynamics for ultra-relativistic nuclear collisions; *Phys. Rev. Lett.* 88:062302 (2002)
- [5] A. Muronga; Causal Theories of Dissipative Relativistic Fluid Dynamics for Nuclear Collisions; *Phys. Rev.* C69:034903 (2004)
- [6] M. A. Aziz and S. Gavin; Causal diffusion and the survival of charge fluctuations in nuclear collisions; *Phys. Rev.* C70:034905 (2004)
- [7] J. D. Bjorken; Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region; *Phys. Rev.* D27:140–151 (1983)
- [8] D. H. Rischke, S. Bernard, and J. A. Maruhn; Relativistic hydrodynamics for heavy ion collisions. 1. General aspects and expansion into vacuum; *Nucl. Phys.* A595:346–382 (1995)
- [9] J. Boris and D. Book; Flux corrected transport i: SHASTA a fluid algorithm that works; *J. Comp. Phys.* 11:38–69 (1973).
- [10] D. L. Book, J. P. Boris, and K. Hain; Flux-Corrected Transport. II - Generalizations of the method; *Journal of Computational Physics* 18:248–283 July (1975).
- [11] D. H. Rischke, Y. Pursun, and J. A. Maruhn; Relativistic hydrodynamics for heavy ion collisions. 2. Compression of nuclear matter and the phase transition to the quark - gluon plasma; *Nucl. Phys.* A595:383–408 (1995)

- [12] Y. Pürsün; Phasenübergangsbetrachtungen in einem hydrodynamischen Modell zur Beschreibung relativistischer Schwerionenkollisionen; Master's thesis Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main (1993).
- [13] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy; Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik; *Math. Ann.* 100:32–74 (1928).
- [14] S. Weinberg; *Theory of Quantum Fields II: Modern Applications*; Cambridge University Press (1997).
- [15] E. Noether; Invariante Variationsprobleme; *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* pages 235–257 (1918).
- [16] M. Gell-Mann and M. Levy; The axial vector current in beta decay; *Nuovo Cim.* 16:705 (1960)
- [17] Y. Nambu; Axial vector current conservation in weak interactions; *Phys. Rev. Lett.* 4:380–382 (1960)
- [18] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio; Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I; *Phys. Rev.* 122:345–358 (1961)
- [19] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio; Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II; *Phys. Rev.* 124:246–254 (1961)
- [20] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg; Broken symmetries; *Phys. Rev.* 127:965–970 (1962)
- [21] C. Itzykson and J. B. Zuber; *Quantum Field Theory*; McGraw-Hill (1980).
- [22] M. L. Goldberger and S. B. Treiman; Form-factors in Beta decay and muon capture; *Phys. Rev.* 111:354–361 (1958)
- [23] C. G. van Weert; *Lecture notes: statistical field theory*; (2001).
- [24] B. D. Serot and J. D. Walecka; The relativistic nuclear many body problem; *Adv. Nucl. Phys.* 16:1–327 (1986)
- [25] O. Savenius; *Dynamics of the Chiral Phase Transition*; PhD thesis Niels Bohr Institute, Copenhagen (2000).
- [26] C. Greiner and B. Muller; Classical Fields Near Thermal Equilibrium; *Phys. Rev. D* 55:1026–1046 (1997)

- [27] J. Randrup; Mean-field treatment of the linear sigma model in dynamical calculations of DCC observables; *Nucl. Phys.* A616:531–554 (1997)
- [28] A. Mocsy; Non-equilibrium aspects of chiral field theories; *hep-ph/0110179* (2001)
- [29] *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*; Press, W.H (1992).
- [30] K. Paech, H. Stoecker, and A. Dumitru; Hydrodynamics near a chiral critical point; *Phys. Rev.* C68:044907 (2003)
- [31] H. Stoecker; Collective Flow signals the Quark Gluon Plasma; *Nucl. Phys.* A750:121–147 (2005)
- [32] H. Stoecker and W. Greiner; High-Energy heavy ion collisions: Probing the equation of state of highly excited hadronic matter; *Phys. Rept.* 137:277–392 (1986)
- [33] P. F. Kolb and U. W. Heinz; Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions; *nucl-th/0305084* (2003)
- [34] S. Voloshin and Y. Zhang; Flow study in relativistic nuclear collisions by Fourier expansion of Azimuthal particle distributions; *Z. Phys.* C70:665–672 (1996)
- [35] U. W. Heinz and P. F. Kolb; Early thermalization at RHIC; *Nucl. Phys.* A702:269–280 (2002)
- [36] H. Sorge; Elliptical flow: A signature for early pressure in ultrarelativistic nucleus nucleus collisions; *Phys. Rev. Lett.* 78:2309–2312 (1997)
- [37] L. P. Csernai and D. Rohrich; Third flow component as QGP signal; *Phys. Lett.* B458:454 (1999)
- [38] J. Brachmann et al.; Antiflow of nucleons at the softest point of the EoS; *Phys. Rev.* C61:024909 (2000)
- [39] R. J. M. Snellings, H. Sorge, S. A. Voloshin, F. Q. Wang, and N. Xu; Novel rapidity dependence of directed flow in high energy heavy ion collisions; *Phys. Rev. Lett.* 84:2803–2805 (2000)
- [40] V. K. Magas, L. P. Csernai, and D. Strottman; Effective string rope model for the initial stages of ultra-relativistic heavy ion collisions; *Nucl. Phys.* A712:167–204 (2002)

- [41] S. A. Voloshin; Anisotropic flow; *Nucl. Phys.* A715:379–388 (2003)
- [42] P. F. Kolb, J. Sollfrank, and U. W. Heinz; Anisotropic transverse flow and the quark-hadron phase transition; *Phys. Rev.* C62:054909 (2000)
- [43] P. F. Kolb, J. Sollfrank, and U. W. Heinz; Elliptic and hexadecupole flow from AGS to LHC energies; *Phys. Lett.* B459:667–673 (1999)
- [44] E. Fermi; High-energy nuclear events; *Prog. Theor. Phys.* 5:570–583 (1950)
- [45] R. D. Woods and D. S. Saxon; Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering; *Phys. Rev.* (95):577–588 (1954).
- [46] I. N. Mishustin, J. A. Pedersen, and O. Scavenius; Fluid dynamical description of the chiral transition; *Heavy Ion Phys.* 5:377–386 (1997)
- [47] O. Scavenius and A. Dumitru; A first-order chiral phase transition may naturally lead to the 'quench' initial condition and strong soft-pion fields; *Phys. Rev. Lett.* 83:4697–4700 (1999)
- [48] A. Abada and M. C. Birse; Coherent amplification of classical pion fields during the cooling of droplets of quark plasma; *Phys. Rev.* D55:6887–6899 (1997)
- [49] S. Gavin and B. Muller; Larger domains of disoriented chiral condensate through annealing; *Phys. Lett.* B329:486–492 (1994)
- [50] S. Gavin; Disoriented chiral condensates; *Nucl. Phys.* A590:163c–177c (1995)
- [51] O. Scavenius, A. Dumitru, E. S. Fraga, J. T. Lenaghan, and A. D. Jackson; First order chiral phase transition in high-energy collisions: Can nucleation prevent spinodal decomposition?; *Phys. Rev.* D63:116003 (2001)
- [52] O. Scavenius, A. Dumitru, and A. D. Jackson; Explosive decomposition in ultra-relativistic heavy ion collision; *Phys. Rev. Lett.* 87:182302 (2001)
- [53] C. Alt et al.; Directed and elliptic flow of charged pions and protons in Pb + Pb collisions at 40-A-GeV and 158-A-GeV; *Phys. Rev.* C68:034903 (2003)
- [54] Y. Akiba et al.; Particle production in Au + Au collisions from BNL E866; *Nucl. Phys.* A610:139c–152c (1996)
- [55] R. Bamm; Pionproduktion in Pb+Pb Kollisionen @ 40 AGeV; Master's thesis Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main (2001).

- [56] H. Appelshauser et al.; Baryon stopping and charged particle distributions in central Pb + Pb collisions at 158-GeV per nucleon; *Phys. Rev. Lett.* 82:2471–2475 (1999)
- [57] C. Adler et al.; Multiplicity distribution and spectra of negatively charged hadrons in Au + Au collisions at  $\sqrt{s(NN)} = 130$ -GeV; *Phys. Rev. Lett.* 87:112303 (2001)
- [58] R. Snellings; v2 measurements at RHIC; <http://www.phenix.bnl.gov/phenix/WWW/publish/rak/workshop/int/talks/Thursday/Morning/Raimond.ppt> (2003).
- [59] A. Einstein; Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes; *Ann. d. Phys.* 33:127–1298 (1910).
- [60] Z. Fodor and S. D. Katz; Critical point of QCD at finite T and  $\mu$ , lattice results for physical quark masses; *JHEP* 04:050 (2004)
- [61] M. A. Stephanov, K. Rajagopal, and E. V. Shuryak; Signatures of the tricritical point in QCD; *Phys. Rev. Lett.* 81:4816–4819 (1998)
- [62] K. Paech; Dynamical correlation length near the chiral critical point; *Eur. Phys. J. C* 33:s627–s629 (2004)
- [63] L. Landau and E. Lifschitz; *Lehrbuch der Theoretischen Physik V: Statistische Physik*; Akademie-Verlag Berlin (1997).
- [64] V. L. Ginzburg and L. D. Landau; On the Theory of superconductivity; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20:1064–1082 (1950)
- [65] A. Dumitru; Calculation of the expansion rate of the three-volume measure in high-energy heavy-ion collisions; *Phys. Lett.* B463:138 (1999)
- [66] B. Berdnikov and K. Rajagopal; Slowing out of equilibrium near the QCD critical point; *Phys. Rev.* D61:105017 (2000)
- [67] C. Bennett et al.; First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Foreground Emission; *Astrophys. J. Suppl.* 148:97 (2003)
- [68] H. V. Peiris et al.; First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for inflation; *Astrophys. J. Suppl.* 148:213 (2003)

- [69] K. Paech and A. Dumitru; Density inhomogeneities in heavy ion collisions around the critical point; *Phys. Lett. B*:200–207 (2005)
- [70] S. A. Bass et al.; Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions; *Prog. Part. Nucl. Phys.* 41:225–370 (1998)
- [71] M. Bleicher et al.; Fluctuations and inhomogeneities of energy density and isospin in Pb + Pb at the SPS; *Nucl. Phys.* A638:391–394 (1998)
- [72] M. Gyulassy, D. H. Rischke, and B. Zhang; Hot spots and turbulent initial conditions of quark-gluon plasmas in nuclear collisions; *Nucl. Phys.* A613:397–434 (1997)
- [73] M. Gyulassy and L. McLerran; New forms of QCD matter discovered at RHIC; *Nucl. Phys.* A750:30–63 (2005)
- [74] H. J. Drescher, S. Ostapchenko, T. Pierog, and K. Werner; Initial condition for QGP evolution from NEXUS; *Phys. Rev.* C65:054902 (2002)
- [75] O. J. Socolowski, F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama; Fluctuations of the initial conditions and the continuous emission in hydro description of two-pion interferometry; *Phys. Rev. Lett.* 93:182301 (2004)
- [76] G. Baym, B. Blattel, L. L. Frankfurt, H. Heiselberg, and M. Strikman; Correlations and fluctuations in high-energy nuclear collisions; *Phys. Rev.* C52:1604–1617 (1995)
- [77] L. Bot and J. Aichelin; Chiral phase transition in an expanding quark-anti-quark plasma; *J. Phys.* G23:1947–1952 (1997)
- [78] J. H. Applegate, C. J. Hogan, and R. J. Scherrer; Cosmological baryon diffusion and nucleosynthesis; *Phys. Rev.* D35:1151–1160 (1987)
- [79] G. M. Fuller, G. J. Mathews, and C. R. Alcock; The quark-hadron phase transition in the early universe: isothermal baryon number fluctuations and primordial nucleosynthesis; *Phys. Rev.* D37:1380 (1988)
- [80] K. Kainulainen, H. Kurki-Suonio, and E. Sihvola; Inhomogeneous big-bang nucleosynthesis in light of recent observations; *Phys. Rev.* D59:083505 (1999)
- [81] P. Braun-Munzinger, K. Redlich, and J. Stachel; Particle production in heavy ion collisions; *nucl-th/0304013* (2003)



- [82] D. Zschesche, L. Portugal, and A. Dumitru; *in Vorbereitung*.
- [83] A. Dumitru, L. Portugal, and D. Zschesche; Inhomogeneous freeze-out in heavy-ion collisions; *nucl-th/0502051* (2005)
- [84] D. Zschesche; Inhomogeneities in the freeze-out of relativistic heavy ion collisions at CERN SPS; *nucl-th/0505054* (2005)
- [85] H. Stoecker et al.; Collective effects and nuclear stopping; *Nucl. Phys.* A566:15c–26c (1994)
- [86] H. Stoecker et al.; Physics in the baryon rich regime; *Nucl. Phys.* A590:271c–290c (1995)
- [87] J. Brachmann, A. Dumitru, H. Stoecker, and W. Greiner; The directed flow maximum near  $c(s) = 0$ ; *Eur. Phys. J.* A8:549–552 (2000)
- [88] J. I. Kapusta, A. P. Vischer, and R. Venugopalan; Nucleation of quark gluon plasma from hadronic matter; *Phys. Rev.* C51:901–910 (1995)
- [89] E. L. Bratkovskaya, S. Soff, H. Stoecker, M. van Leeuwen, and W. Cassing; Evidence for nonhadronic degrees of freedom in the transverse mass spectra of kaons from relativistic nucleus nucleus collisions; *Phys. Rev. Lett.* 92:032302 (2004)



# DANKSAGUNG

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Adrian Dumitru für die fortwährend gute Betreuung und das interessante Thema bedanken.

Der Josef-Buchmann-Stiftung und der Marie-Curie-Stiftung danke ich für die großzügige finanzielle Unterstützung. Der Hermann-Willkomm-Stiftung und den Freunden und Förderern der Universität Frankfurt möchte ich für die finanzielle Unterstützung einiger meiner Konferenzteilnahmen danken. Wolfgang Bauer von der Michigan State University möchte ich für die Finanzierung meiner Teilnahme am Nuclear Dynamics Workshop in Breckenridge danken. Adrian Dumitru und Horst Stöcker möchte ich herzlich für die finanzielle und moralische Unterstützung danken, die mir viele Tagungsbesuche und Vorträge ermöglichten.

Für ihre Gastfreundschaft beim Besuch der jeweiligen Institute und Universitäten möchte ich mich bei Steffen Bass (Duke), Wolfgang Bauer (MSU), Laszlo Csernai (Bergen), Carlos Eduardo Aguilar (UFRJ), Takeshi Kodama (UFRJ), Bernd Müller (Duke), Scott Pratt (MSU) und Dieter Röhrich (Bergen). Ganz besonders danke ich Bianca Ross für Ihre Gastfreundschaft und kulinarischen Wunderwerke.

Dem Bergen Computational Physics Laboratory (BCPL) und dem Center for Scientific Computing (CSC) Frankfurt möchte ich für die Bereitstellung der umfangreichen Ressourcen und Rechenzeit danken, durch welche diese Arbeit erst möglich wurde. Mein ganz besonderer Dank gilt dabei Alex Achenbach, Manuel Reiter und Boris Wagner, die immer ihr möglichstes getan haben, um für eine gut funktionierende Infrastruktur zu sorgen.

Bei Daniela Radulescu und Veronika Palade möchte ich mich für die fortwährende Hilfe bei bürokratischen Dingen bedanken.

Bei meinen wechselnden Zimmerkollegen Yasushi Nara, Manuel Reiter, Stefan Schramm und Sascha Vogel möchte ich mich für die freundliche und entspannte Atmosphäre bedanken.

Ganz besonderer Dank gilt meinen Freunden, die mich während der letzten Jahre

durch scheinbar kleine - aber auch große - Gesten unendlich unterstützt haben.

Im Besonderen möchte mich bei Alex Achenbach für die großartigen und oft nicht endend wollenden “Bernemer Nights” bedanken. Bei Dennis Dietrich möchte ich mich für sein immer offenes Ohr, seine tatkräftige Unterstützung bei einer Vielzahl von Problemen und vor allem für seine Freundschaft bedanken. Sabine Doerner möchte ich für die vielen Gelegenheiten danken, bei denen sie mich von den großen und kleinen Problemen des Alltags abgelenkt hat. Sabine Hossenfelder danke ich dafür, daß sie so oft die richtigen Worte fand wo ich sie vergeblich suchte. Großer Dank gilt auch meinem Mitbewohner Denis Grljusic, der dafür gesorgt hat, daß ich mich immer zu Hause fühlte, und der mir mit seiner unverkennbar südländischen Art das eine oder andere Mal den Kopf gerade rückte und ihn manchmal auch einfach nur gestützt hat. Manuel Reiter danke ich ganz besonders für die vielen hilfreichen und aufbauenden Gespräche und den Spaß, den mir das gemeinsame Arabischlernen gebracht hat. Stefan Scherer danke ich neben den Tatortabenden für seine Hilfe in allen denkbaren Bereichen.

Für ihre fortwährende Unterstützung möchte ich meiner Familie herzlich danken.

Und schließlich möchte ich meinem Freund Stefan für seine Geduld und seine im wahrsten Sinne unerschöpfliche moralische Unterstützung danken.

# CURRICULUM VITAE

Name: Paech, Kerstin Anja  
Geburtsdatum: 18. Juli 1978  
Geburtsort: Hanau am Main, Deutschland

## Ausbildung

1997 Abitur  
Friedrich Dessauer Gymnasium, Aschaffenburg, Gesamtnote: 2,4

Beginn des Physikstudiums  
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main

1999 Vordiplom in Physik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main  
Gesamtnote: gut

2001 Diplom in Physik  
Institut für Theoretische Physik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main  
Betreuer: H. Stöcker und A. Dumitru  
Gesamtnote: sehr gut

Aufnahme des Promotionsstudiums in Physik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main und  
Betreuer: A. Dumitru

## Stipendien

Juni-September 2002 Marie Curie Stipendium (Doktorandenprogramm)  
Juni 2003 - Juni 2004 Josef Buchmann Stipendium



# AKADEMISCHE LEHRER

Prof. Dr. W. Aßmus  
Prof. Dr. H. Becker  
Prof. Dr. F. Constantinescu  
J. Prof. Dr. A. Dumitru  
Prof. Dr. T. Elze  
Prof. Dr. C. Greiner  
Prof. Dr. W. Greiner  
Prof. Dr. K. Groeneveld  
Prof. Dr. H. Roskos  
Prof. Dr. J. Jelitto  
Prof. Dr. P. Kloeden  
Prof. Dr. B. Kolbesen  
Prof. Dr. E. Mohler  
Dr. J. Reinhardt  
Prof. Dr. D. Rischke  
Prof. Dr. A. Schaarschmidt  
Prof. Dr. H. Schmidt-Böcking  
Prof. Dr. S. Schramm  
Prof. Dr. R. Stock  
Prof. Dr. H. Stöcker  
Prof. Dr. H. Ströbele

